This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

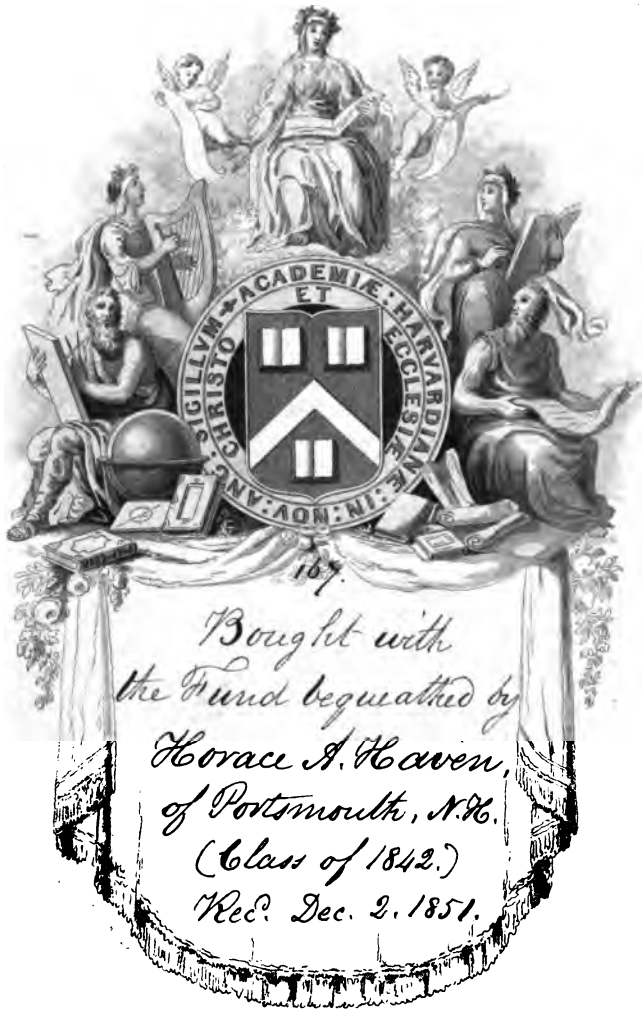
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

32. 40. 5.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5708.46



167.

Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven,
of Portsmouth, N.H.
(Class of 1842.)
Rec'd Dec. 2. 1851.

Vorschule

der

darstellenden Geometrie.

Ein Handbuch

für

Lineal- und Zirkelzeichnen

zur practischen Benutzung

für

angehende Handwerker, Maschinen- und Bau-Zeichner, Feldmesser, Architecten, Ingenieure und Schüler technischer Lehranstalten und Gewerbeschulen.

Dr. A. L. Busch,

Observator an der Königl. Universitäts-Sternwarte und Lehrer an der Königl. Provinzial Gewerbeschule zu Königsberg, Mitglied der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig, und der physicalisch-öconomischen Gesellschaft zu Königsberg.

Mit einem Vorwort

von

C. G. J. Jacobi,

Ordentlicher Professor und Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Berlin,

Druck und Verlag von G. Reimer.

1846.

Math 5708.46

1851 Dec 2

Haven Fund

Jacob Schay 167

„Man hat bisher in unsern deutschen Landen," beginnt Albrecht Dürer seine „Unterweisung der Meßung mit dem Zirkel und Richtscheit," „viel geschickte Jünger der Malerkunst ohne alle Grundlage bloß durch tägliche Uebung gelehrt, und sie also im Unverstand wie einen wilden unbeschnittenen Baum aufwachsen laßen. Wiewohl etliche von ihnen Fertigkeit und eine freie Hand erlangt, so daß sie ihr Werk gewaltig, aber unbedacht und allein nach ihrem Gutdünken gemacht haben, so mußten doch die verständigen Maler und rechten Künstler beim Anblick solcher Werke dieser Leute ihre Blindheit belachen, weil einem rechten Verstand nichts unangenehmer auffällt denn Falschheit im Gemäld, unangesehen ob das auch mit allem Fleiß gemalt wird. Daß aber solche Maler an ihren Irrthümern Wohlgefallen gehabt, rührt davon her, daß sie die Kunst der Meßung nicht gelernt, ohne die kein rechter Werkmann werden oder sein kann. Ich habe mir daher vorgenommen, für alle Kunstjünger eine Unterweisung zusammenzustellen, damit sie durch Uebung im Meßen mit Zirkel und

Richtſcheit die rechte Wahrheit erkennen und vor Augen ſehen und zu einem rechten und größeren Verſtand in der Malerei kommen mögen. — In welchen Ehren dieſe Kunſt bei den Griechen und Römern geweſen, zeigen die alten Bücher genugſam an. Nachmals iſt ſie aber verloren gegangen und an tauſend Jahr verborgen geweſen, und erſt ſeit zweihundert Jahren wieder durch die Wälſchen an den Tag gebracht worden; denn leicht verlieren ſich die Künſte, aber ſchwer und durch lange Zeit werden ſie wieder erfunden. Demnach hoffe ich, mein Vorhaben werde kein Verſtändiger tadlen, weil es aus guter Meinung und allen Kunſtbegierigen zu Nutz geſchieht, und auch nicht den Malern allein, ſondern Goldſchmiden, Bildhauern, Schreinern und allen denen, ſo das Maaß brauchen, nützlich ſein mag, und ich weiß wohl, daß wer ſich meiner Lehre bedient, nicht nur einen guten Grund legen, ſondern auch zu einem größeren Verſtand gelangen, weiter ſuchen und gar viel mehr erfinden wird, als ich jetzt anzeige."

Dieſe durch ernſtes Studium und fleißige Uebung mit Zirkel und Lineal hervorgegangene Kenntniß ſtreng geometriſcher Formen und Proportionen kam Dürer hauptſächlich in der Kunſt zu Statten, durch welche er am meiſten das Staunen ſeiner Zeitgenoßen und die Bewunderung der Nachwelt erregt hat, wenn, wie Erasmus in ſeinem Dialoge über die richtige Ausſprache des Lateiniſchen und Griechiſchen ſich ausdrückt, „größer wie Apelles ohne den Lockreiz der Farben bloß durch glückliche Anwendung ſchwarzer Linien er Schatten, Licht, Glanz, Erhöhungen, Vertiefungen, die verſchiedne Stellung desſelben Gegenſtandes, die harmoniſchen Maße, ja das zu malen Unmögliche, Feuer, Lichtſtrahlen, Donner, Wetterleuchten, Blitz, Nebel, alle Sinne und Leidenſchaften, die ganze menſchliche Seele von der Lei-

besgestalt wiederstrahlend, fast ja die Stimme selbst so vor die Augen hinstellt, daß durch Hinzufügung der Farbe dem Werke nur Unrecht geschähe." Das gründliche geometrische Vorstudium erweiterte den Blick und die Sphäre der Thätigkeit jener alten Meister, Pietro Francesco, Gentile und Giovanni Bellini, Alessandro Boticelli, Philippino und Domenico Girlandaio, Pietro Perugino, Andrea Mantegna, welche, wie uns der große Mathematiker Fra Luca dal Borgo, der häufig mit ihnen in geometrischen Gesprächen verkehrte, in seiner Summa Arithmetica berichtet, immer mit Zirkel und Lineal ihre Werke proportionirten und sie so zu der Vollendung brachten, die wir an ihnen bewundern. In den dreizehn riesigen Foliobänden, welche die Pariser Bibliothek und die Ambrosiana zu Mailand aufbewahren, sieht man, in welchem Umfange Leonardo da Vinci, ebenso wie Dürer, alles was zu den graphischen Künsten in Beziehung stand, mag es die Proportionen des menschlichen Leibes oder der Blätter der Bäume oder mehr phantastische Ornamente, Brükken und Basiliken, die Fortification, ja die Geschützkunst betreffen, auf geometrische Constructionen zurückgeführt.

Außerdem daß das vertraute Umgehen mit Zirkel und Lineal und die sorgfältige Ausführung der geometrischen Constructionen den Sinn und das Interesse für strenge Richtigkeit weckt und schärft, und dadurch zu jeder besondern Kunst tüchtiger macht, kann eine so vielen Künsten und Gewerken gemeinschaftliche Grundlage dazu beitragen, die jetzt Statt findende Isolirung der Maler-, Bildhauer-, Goldschmide-, Baukunst, die gegenseitige Entfremdung der verschiednen Handwerke, die doch zu demselben Ganzen zusammenzuwirken haben, in etwas zu verringern, obschon eine solche Vereinigung, wie sie bei den

hervorragenden Genien jener Zeit des großen Kunstaufschwungs, einem Dürer, Leonardo, Buonarotti gesehen wurde, nicht wohl fürder möglich ist.

Das vorliegende Büchlein behandelt denselben Gegenstand, verfolgt die nämlichen Zwecke, und sucht dieselben Bedürfnisse zu befriedigen, wie jenes oben angeführte Werk Dürers; daher es mir nicht unpassend schien, dasselbe mit den Worten einzuleiten, die der große Meister seiner Schrift vorsetzt, welche die erste ihrer Art in deutscher Sprache gewesen ist. Wenn das vorliegende Buch die erfreulichste Bekanntschaft des Verfassers mit den neueren Constructionsmitteln verräth, so trifft man doch darin auch gern noch hie und da einige der in jenem alten Werke enthaltenen Vorschriften, wie z. B. die zur angenäherten Construction eines dem Kreise einzuschreibenden Siebenecks. Denn es hat sich aus demselben noch gar manches durch Uebergehen in spätere Werke, wie die „Praktische Geometrie" und die „Mathematischen Erquickstunden" des gelehrten Schwenter, in der Tradition der Kunstschulen erhalten. Ja wenn man sich nicht über den Reichthum verwundern müßte, den unser Verfasser in den kleinsten Raum zusammenzudrängen gewußt hat, möchte man wünschen, es wäre noch mehreres aus dem Dürerschen oder verwandten Werken aufgenommen, insbesondre außer den Kegelschnitten die Construction noch andrer in den Künsten vorkommenden Curven, von denen sich hier nur der sogenannte gedruckte Bogen findet. Sehr zu loben ist die den angenäherten Lösungen beigefügte Vergleichung der Zahlen, welche die Construction und die strenge Rechnung giebt. Das bequeme Format und die große Zweckmäßigkeit der ganzen Einrichtung empfehlen das Buch sogleich beim ersten Anblick.

Wenn der Verfaſſer ſein Buch für angehende Handwerker, Maſchinen- und Bauzeichner, Feldmeſſer, Architecten, Ingenieure und Schüler techniſcher Lehranſtalten und Gewerbeſchulen beſtimmt, und man nach den angeführten großen Autoritäten dieſen noch die Jünger der Maler-, Bildhauer- und Goldſchmidekunſt beifügen kann, ſo glaube ich doch, daß in einem ſolchen Buche nicht die Künſtler und Gewerkleute allein eine nützliche Unterweiſung und Vorbereitung finden, ſondern daß es auch für den wiſſenſchaftlichen Unterricht in der Geometrie, wie ihn Gymnaſien und höhere Bürgerſchulen gewähren ſollen, eine treffliche Vorſchule abgiebt. Die Strenge der geometriſchen Beweiſe iſt eine Erfindung der Griechen, welche dem menſchlichen Verſtande zur höchſten Ehre gereicht. Aber ſie iſt nur dem reiferen Knaben- und angehenden Jünglingsalter eine paſſende und geſunde Nahrung, und dann nebſt der Grammatik eine wahre Zucht des Verſtandes. Dem Knaben, dem dieſe Welt der geometriſchen Formen noch eine gänzlich fremde iſt, mit den erſten Vorſtellungen, die man ihm davon überliefert, zugleich ſchon zuzumuthen, ſich darin in der Weiſe folgerechten Denkens nach ſyſtematiſchem Fortſchritt zu bewegen, ſcheint keine gute Pädagogik. Ich ſchreibe dieſem Misverhältniß hauptſächlich das beachtenswerthe Phänomen zu, daß zwar von den andern Unterrichtsgegenſtänden eine Färbung, ein Intereſſe im ſpäteren Leben zurückzubleiben pflegt, von den mathematiſchen dagegen bei der großen Mehrzahl der Lernenden jede Spur bis auf die Erinnerung ſchwindet, während doch gerade dieſe Formen, dieſe Proportionen, deren Geſetzmäßigkeit und Zuſammenhang den jugendlichen Scharfſinn beſchäftigt hat, uns auch in der Folge fortwährend umgeben und ihre Fragen an uns richten. Peſtalozzi hatte von dem einzuſchlagenden Wege eine richtige Vor-

ſtellung, aber aus Mangel an poſitiven Kenntniſſen konnte er ſeiner Methode keinen Leib verleihen, ließ er ſie im Ab- und Aufzählen der Stücke nach einem leeren Schematismus combinirter Figuren verflattern. Ein Werk von der Tendenz und Ausführung des vorliegenden giebt dem mathematiſchen Gymnaſiallehrer eine treffliche Anleitung, die Schüler mit jenen Begriffen und Formen zuvörderſt zu befreunden, durch ſelbſtthätiges Schaffen ihre Luſt daran zu erregen, um dann das erweckte Bedürfniß eines vollkommenen Verſtändniſſes in der folgenden Altersſtufe durch den ſtrengen Beweis zu befriedigen. Selbſt der, welchem nach dieſer Seite hin nur geringe Fähigkeit zum folgerechten Schließen verliehen wäre, würde doch nicht ganz Schiffbruch leiden, ſondern könnte ſich einen werthvollen Beſitz retten, die durch Anſchauung und eigne Ausführung mit Zirkel und Lineal erworbne vertraute Kenntniß geometriſcher Formen.

Berlin, den 19. Juni 1846.

C. G. J. Jacobi.

Vorrede.

Die beschreibende oder darstellende Geometrie ist schon lange, nachdem ihr practisches Bedürfniß immer mehr und mehr erkannt worden, in den meisten technischen Lehranstalten und Gewerbeschulen ein Hauptgegenstand des Unterrichtes geworden, und ihr längst anerkannter, vor Kurzem in einer kleinen interessanten Schrift *) näher auseinander gesetzter Einfluß auf die Geometrie läßt erwarten, daß sie sich auch bald, wie solches schon hie und da geschehen, in den übrigen öffentlichen Unterrichtsanstalten eines günstigen Platzes bei dem Unterrichte in der Mathematik zu erfreuen haben wird.

Das Bedürfniß guter Lehrbücher in dieser Wissenschaft für die Schüler solcher Anstalten ist auch größten Theils

*) Ueber den Einfluß der Projectionslehre auf die neuere Geometrie, von Dr. C. T. Anger, Professor am Gymnasium und Director der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Danzig. Danzig, 1845.

befriedigt worden, allein die practiſche Gewandtheit in der Handhabung des Zirkels und Lineals, welche als das Element alles Zeichnens bei dem Beginne des Unterrichtes in der Projectionslehre vorausgeſetzt werden muß, und die theoretiſchen Vorkenntniſſe in der Conſtructionslehre ſind bei den meiſten Schülern ſtets ſo geringe, daß der Lehrer ſich faſt immer genöthigt ſieht, dieſen Elementen eine längere Zeit ſeines Unterrichtes zu widmen, wenn er ſeine Schüler nicht auf Schwierigkeiten ſtoßen ſehen will, welche der Projectionslehre ſelbſt ganz fremd ſind. Zwar fehlt es nicht an Anleitungen zum Zeichnen mit Lineal und Zirkel, und der Verfaſſer hätte die Zeit nicht darauf verwandt, die Anzahl derſelben um eine neue zu vermehren, wenn ihm unter allen ein Werk zu Geſichte gekommen wäre, welches von unnützen und unbrauchbaren Conſtructionen frei wäre, unbequeme Sonderung des Textes von den Figuren und großes Format vermiede, und vor Allem eine ſolche Vollſtändigkeit des Gegenſtandes beſäße, um als Vorſchule bei dem Unterrichte in der darſtellenden Geometrie dienen, und zugleich auch dem mathematiſchen Lehrer manchen Stoff zu häuslichen Aufgaben für die Schüler darbieten zu können.

Der Verfaſſer hat in den Anleitungen dieſer Art manche für das practiſche Linearzeichnen nie in Anwendung kommende Conſtruction gefunden, dagegen viele für die Praxis

wichtige vermißt, wie z. B. die schönen von Mascheroni gegebenen Constructionen, den Kreis mit alleiniger Anwendung des Zirkels in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, und über einer gegebenen Seite ein reguläres Vieleck von einer gegebenen Anzahl Seiten zu construiren, eben so wie die Anwendung der geometrischen Oerter, die in der Praxis häufig leichter als andere mathematische Auflösungsmethoden zum Ziele führt.

Nur erst dann, wenn der Schüler, mit den im Buche enthaltenen Constructionen vertraut geworden, jede einzelne genau und sauber im Großen, etwa auf einem Quartblatte, auszuführen im Stande ist, und dadurch Gewandtheit mit Zirkel und Lineal umzugehen erlangt hat, wird er die verwickelteren in der darstellenden Geometrie und in der Perspective vorkommenden Zeichnungen mit Leichtigkeit ausführen können.

In der That sind durch diese Methode des ersten Zeichenunterrichts allein Viele, welche mit dem Verfasser das Glück hatten, in der Danziger Kunstschule Schüler des verstorbenen genialen Breysigs gewesen zu sein, dahin gelangt, die complicirtesten Linearzeichnungen mit Genauigkeit und Fertigkeit zu entwerfen und auszuführen.

Sollten die folgenden Blätter den eben gestellten Anforderungen Genüge leisten, und dadurch der Wunsch vieler Prac-

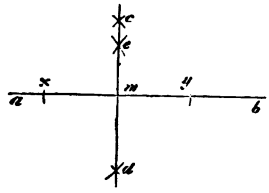
tiker, ein kleines, brauchbares Handbuch dieſer Art, ſo wie der Lehrer in der darſtellenden Geometrie, ein Hülfsmittel für den erſten Unterricht im Linearzeichnen zu beſitzen, erfüllt werden, ſo würde ſich für ſeine darauf verwandte Mühe reichlich belohnt fühlen

Königsberg, im Februar 1846.

der Verfaſſer.

Aufgabe 1.

In einem geg. P. einer geraden Linie ein Loth zu errichten.

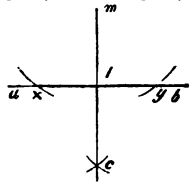


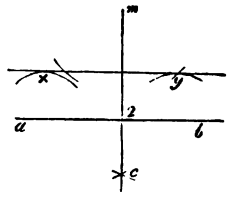
Aufl. Mit einer beliebigen Zirkelöffnung mache man mx = my, mit einer größeren Oeffnung des Zirkels aus x und y die Bogen bei c und d und ziehe die Linie cd, welche durch den Punct m geht.

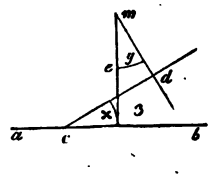
Bemerkung. Ist unterhalb der Linie ab kein Raum für die Bogen bei d, so schlage man aus x und y noch die Bogen bei e, so wird die gerade Linie durch c und e auch durch m gehen. Um mit Sicherheit durch zwei Puncte mit dem Lineal eine Linie zu ziehen, ist es stets vortheilhaft noch einen dritten Punct zu haben, der in derselben Linie liegt.

Aufgabe 2.

Durch einen geg. P. m außerhalb einer geraden Linie ab ein Perpendikel zu fällen.





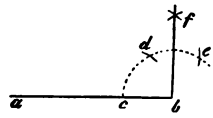


Aufl. Aus m (1) schneide man mit einer größtmöglichsten Zirkelöffnung die Linie ab in x und y, aus x und y die Kreuzbogen in c und ziehe mc. Ist m so weit von ab (2) entfernt, daß keine Zirkelöffnung ab schneidet, so mache man aus zwei beliebigen

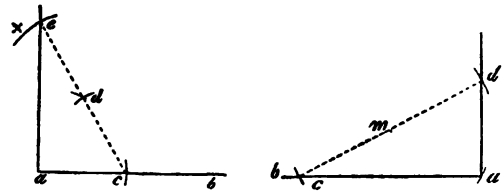
Puncten in ab mit gleichem Radius die Bogen x, y, ziehe eine beide Bogen berührende Linie und errichte nach (1) auf dieser das Perpendikel mc. Oder, man ziehe beliebig cd (3) aus m das Perpendikel md und mache den Bogen y=x, so ist, wenn man mc zieht, diese Linie senkrecht auf ab.

Aufgabe 3.

In dem Endpuncte einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.



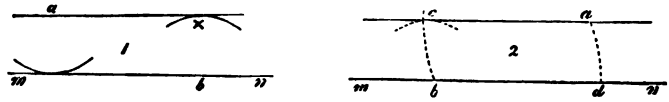
Aufl. 1. Mit einem beliebigen Radius mache man aus b den Bogen ce, cd=de=bc gemacht und aus d und e die Kreuzbogen in f und bf gezogen.



Aufl. 2. Mit einem beliebigen Radius schneide man aus a in c, aus a und c in d geschnitten und aus d den Bogen bei x gemacht, über c und d das Lineal angelegt und den Bogen x in e geschnitten und ae gezogen. Oder man setze beliebig in m ein, schneide mit ma in c und d und ziehe cm bis zum Bogen d, so ist ad das verlangte Perpendikel.

Aufgabe 4.

Durch einen geg. Punct a eine Parallele mit einer geg. Geraden zu ziehen.

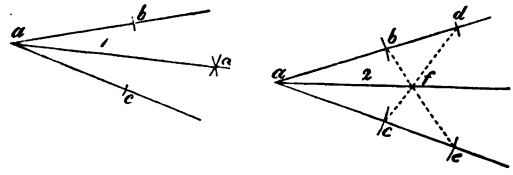


Aufl. Man setze den Zirkel in a (1) ein und mache einen die Linie mn berührenden Bogen, setze beliebig in b ein und mache mit derselben Oeffnung des Zirkels den Bogen x und ziehe durch a eine

Linie, welche den Bogen x berührt. Oder: Man mache aus a (2) mit beliebiger Oeffnung des Zirkels den Bogen bc, aus b den Bogen ad, nehme ad in den Zirkel und schneide aus b in c und ziehe ac.

Aufgabe 5.

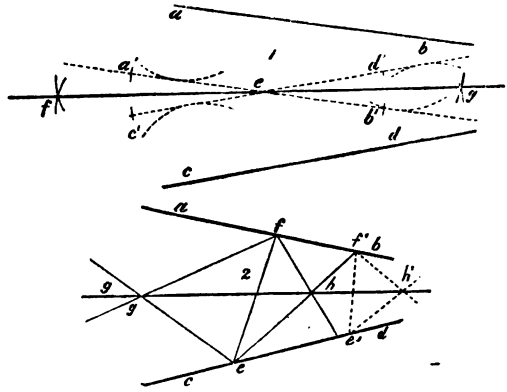
Einen gegebenen Winkel zu halbiren.



Aufl. Man mache ab=ac (1) aus b und c die Kreuzbogen in d und ziehe ad. Oder: Man mache (2) ab=ac; ad=ae, wo sich die Geraden be und cd in f schneiden, ziehe man af.

Aufgabe 6.

Einen Winkel, dessen Spitze nicht gegeben, ist zu halbiren.



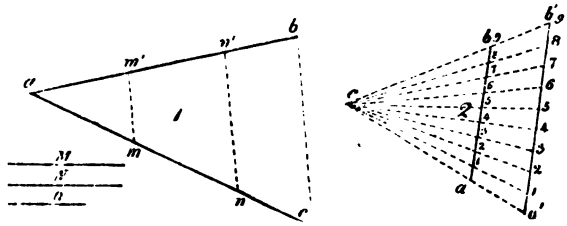
Aufl. 1. Man ziehe mit den Schenkeln ab, cd des gegebenen Winkels in gleicher Entfernung die Parallelen a'b', c'd' so, daß sie sich in e schneiden und halbire dann den Winkel a'ec' oder b'ed' und ziehe fg.

Aufl. 2. Ist der Winkel sehr klein, so wird der in der ersten Auflösung gefundene Schnittpunct e sich nicht ohne Weiteres genau angeben lassen; in diesem Falle ziehe man ef, Fig. 2. beliebig quer durch ab und cd hindurch und halbire die Winkel, die dann entstehen; wo sich die Halbirungslinien in g und h schneiden, ziehe man gh. Am genauesten verfährt man, wenn man zwei so weit als

möglich von einander entfernte Querlinien ef, e'f' zieht, die Puncte g und h' ſucht und dieſe mit einander verbindet.

Aufgabe 7. a.

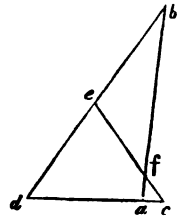
Eine gerade Linie ab nach einem gegebenen Verhältniß oder in eine beſtimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.



Aufl. Man ziehe durch einen Endpunct a (1) der gegebenen Linie eine beliebige Linie ao, trage auf dieſer am=M, mn=N, no=O auf und verbinde b mit o, ziehe dann durch m, n Parallelen mit bo bis ab, ſo wird durch die Schnittpuncte m', n' die Linie ab nach dem Verhältniße M:N:O getheilt. Auf dieſelbe Weiſe kann man die Linie ab, wenn man am=mn=no ꝛc. macht, in beliebig viel gleiche Theile theilen. Man kann aber auch, um ab in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, a'b' (2) parallel ab ziehen, auf dieſer gleiche Theile auftragen und aa', bb' bis zum Schnittpuncte c ziehen. Verbindet man nun c mit den Theilpuncten 1. 2. 3. ꝛc. in a'b', ſo wird ab durch die Schnittpuncte dieſer Linie, in dieſelbe Anzahl gleicher Theile getheilt. Genauer wird die Conſtruction, wenn man die gleichen Theile in a'b' ſo groß annimmt, daß immer a'b' größer als ab wird.

Aufgabe 7. b.

Den n^ten Theil einer Linie ab zu beſtimmen.

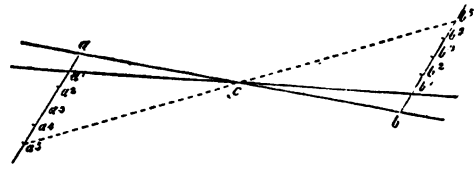


Aufl. Man ziehe durch a eine beliebige Linie dc, trage von a

aus nach der einen Seite hin ein beliebiges Stück ac einmal, nach der anderen Seite hin von a nach d daſſelbe n—2 mal auf, verbinde d mit b und den Mittelpunkt e von db mit c, ſo iſt af der n^{te} Theil von ab. Soll z. B. von ab der 7te Theil gefunden werden, ſo trage man das beliebig angenommene Stück ac von a nach d 5 mal auf, ſo iſt af=$\frac{1}{7}$ab.

Aufgabe 8.

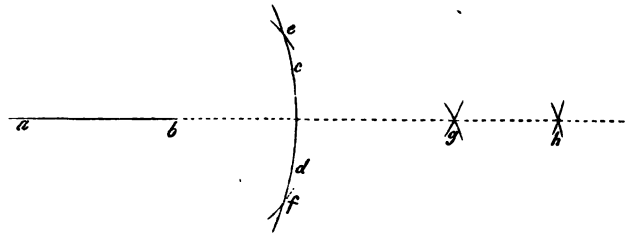
Den Durchſchnittspunct zweier Linien, die ſich unter einem kleinen Winkel ſchneiden, genauer zu beſtimmen.



Aufl. Man ziehe zu beiden Seiten des Schnittpunctes c in entgegengeſetzter Richtung zwei Parallelen, und trage die Stücke aa^1, bb^1 auf dieſe gleich oft auf und verbinde die gleichnamigen Puncte, wie hier a^5 mit b^5, ſo geht dieſe Linie ebenfalls durch den Schnittpunct c.

Aufgabe 9.

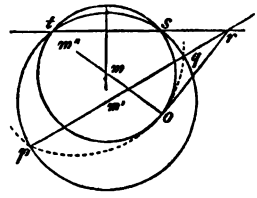
Einen oder mehrere Puncte zu finden, die in der Verlängerung einer gegebenen geraden Linie liegen.



Aufl. Aus einem Puncte a beſchreibe man den Bogen cd, aus einem anderen Puncte b mit einem kleineren Radius ſchneide man cd in e und f, und aus e und f die Kreuzbogen bei g und h.

Aufgabe 10.

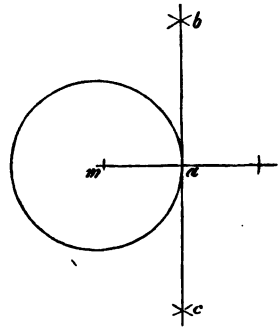
Die Durchschnittspuncte zweier Kreise, die sich unter einem kleinen Winkel schneiden, genauer zu bestimmen.



Aufl. Man ziehe aus einem beliebigen Puncte m'' durch den Mittelpunct m des kleineren Kreises m''m bis o, aus m'' mit m''o schneide man den größeren Kreis in p und q, und ziehe pq bis sie die Senkrechte aus o in r schneidet, und fälle aus r ein Perpendikel auf die Verbindungslinie beider Mittelpuncte m m', so geht dieses durch die Schnittpuncte beider Kreise s und t.

Aufgabe 11.

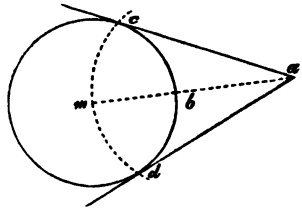
Durch einen gegeben Punct in der Peripherie eines Kreises eine Tangente zu ziehen.



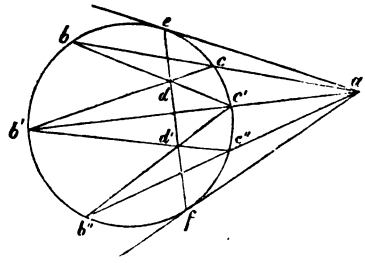
Aufl. Man ziehe den Radius ma und errichte in a ein Perpendikel bc.

Aufgabe 12.

Durch einen gegebenen Punct außerhalb eines Kreiſes eine Tangente zu ziehen.



Aufl. 1. Man verbinde m mit a, halbire ma in b und ſchneide mit bm in c und d und ziehe ac oder ad.

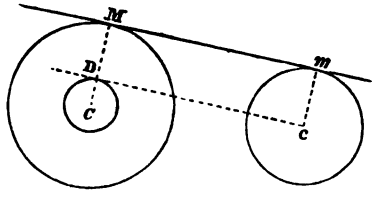


Aufl. 2. Man ziehe von a aus drei beliebige Linien ab, ab′, ab″, welche den Kreis noch in c, c′, c″ ſchneiden und verbinde kreuzweiſe die Puncte b, c′; b′, c, eben ſo b′, c″; b″, c′, wodurch man die Schnittpuncte d, d′ erhält; dieſe verbunden geben dann die Berührungspuncte e und f.

Man merke, daß dieſe Auflöſung nur allein mit dem Lineal ausgeführt worden iſt.

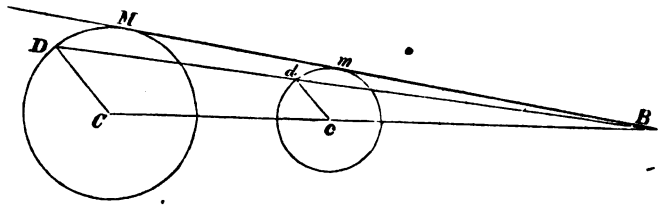
Aufgabe 13.

An zwei gegebenen Kreiſen eine gemeinſchaftliche Tangente zu ziehen.

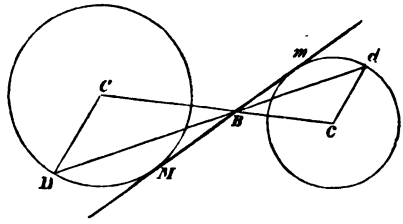


Aufl. 1. Man beſchreibe aus C mit dem Radius CD = CM — cm

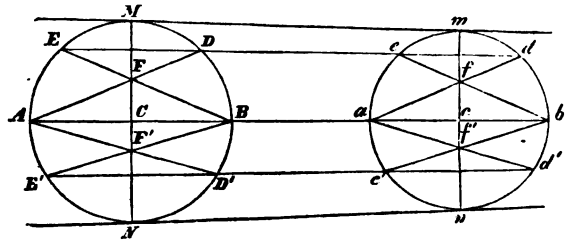
einen Kreis, aus c die Tangente cD und auf dieſer die Senkrechten CM, cm und ziehe Mm.



Aufl. 2. a. Man verbinde beide Mittelpuncte C, c, ziehe auf einerlei Seite von Cc zwei parallele Radien CD, cd und ziehe Dd bis ſie die Cc in B ſchneidet, zieht man nun von B aus eine Tangente an den einen Kreis, ſo iſt dieſe auch zugleich Tangente an dem anderen.



Aufl. 2. b. Soll die Tangente beide Kreiſe ſo berühren wie in obiger Figur, ſo ziehe man Cc und auf entgegengeſetzter Seite von Cc zwei parallele Radien CD, cd, verbinde D mit d, wodurch man den Schnittpunct B erhält, eine Tangente durch dieſen Punct an dem einen Kreiſe iſt dann auch zugleich Tangente an dem anderen.

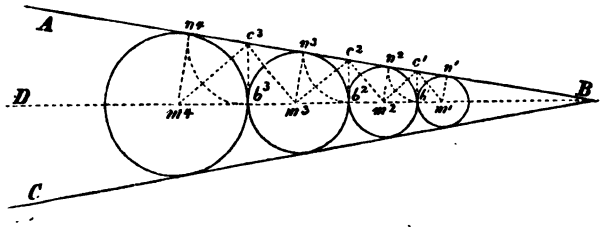


Aufl. 3. Sind die Radien beider Kreiſe beinahe gleich, dann ziehe man Cc, welche beide Kreiſe in A, B und a, b ſchneidet, ziehe

aus A, AD beliebig und ad parallel, verbinde D mit d, wodurch man die Puncte E und e erhält, zieht man nun BE, be, ſo erhält man die Schnittpuncte F und f. Auf gleiche Weiſe erhält man unterhalb Cc die Schnittpuncte F' und f', verbindet man nun F mit F' und f mit f' ſo erhält man die Puncte M, N und m, n und Mm oder Nn als geſuchte Tangente.

Aufgabe 14.

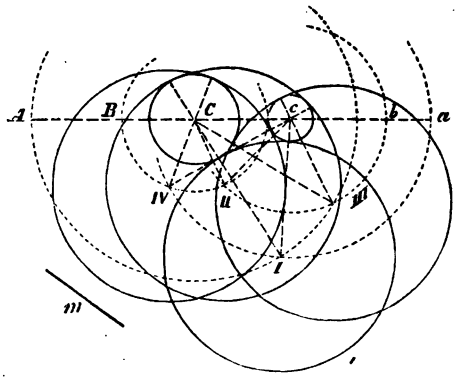
Zwiſchen zwei gegebenen geraden Linien Kreiſe zu conſtruiren, die einander und auch die geraden Linien berühren.



Aufl. Man halbire den Winkel ABC durch BD, ziehe m'n' ſenkrecht auf AB und beſchreibe aus m' mit m'n' einen Kreis, aus b' ziehe man b'c' ſenkrecht auf BD, mache c'n² = c'b' und ziehe n²m² ſenkrecht auf AB, oder man halbire den Winkel b'c'n² durch c'm², ſo gelangt man zum Mittelpuncte m² des folgenden Kreiſes. Fängt man die Conſtruction mit dem größten Kreiſe aus m⁴ an, ſo ziehe man b³c³ ſenkrecht auf BD und halbire den Winkel b³c³n³ durch c³m³, ſo erhält man dadurch den Mittelpunct m³ des nächſtfolgenden kleineren Kreiſes.

Aufgabe 15.

Mit einem gegebenen Radius m einen Kreis zu beſchreiben, der zwei gegebene Kreiſe berührt.



Aufl. Man verbinde beide Mittelpuncte der gegebenen Kreiſe Cc, mache

$$AC = m + R, \quad BC = m - R$$
$$ac = m + r, \quad bc = m - r$$

wo R und r die Radien beider gegebenen Kreiſe bezeichnen und beſchreibe mit AC und BC um C, mit ac und bc um c zwei concentriſche Kreiſe, ſo iſt der

Schnittpunct I der Mittelpunct des Kreiſes, der beide gegebene Kreiſe ausſchließend berührt;

II der Mittelpunct des Kreiſes, der beide gegebene Kreiſe einſchließend berührt;

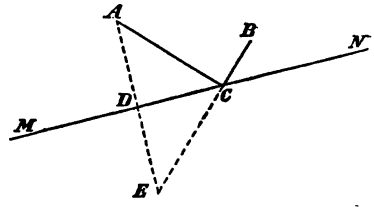
III der Mittelpunct des Kreiſes, der den größeren ausſchließend, den kleineren einſchließend berührt;

IV der Mittelpunct des Kreiſes, der den größeren einſchließend, den kleineren ausſchließend berührt.

Auf der anderen Seite von Cc liegen ebenfalls vier Mittelpuncte zu den geſuchten Kreiſen.

Aufgabe 16.

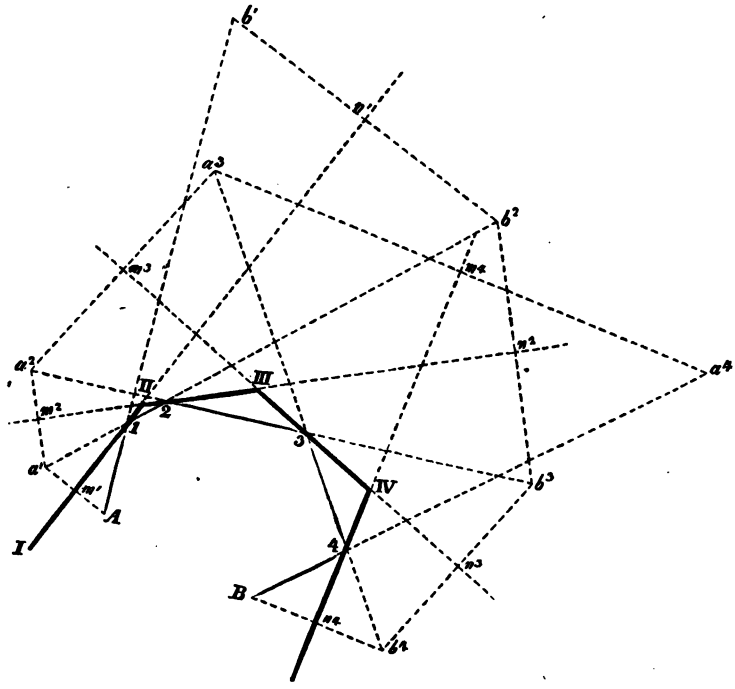
In einer Geraden einen Punct ſo zu beſtimmen, daß wenn man dieſen mit zwei außer, aber auf einerlei Seite dieſer Geraden liegenden Puncten verbindet, dadurch gleiche Winkel entſtehen.



Aufl. Man fälle aus einem der gegebenen Puncte, etwa A, eine Senkrechte AE auf MN, mache DE=AD und verbinde E mit B, so ist der Schnittpunct C der gesuchte und ∠ACD=∠BCN.

Aufgabe 17.

Die vorige Aufgabe, aber für mehrere Geraden.

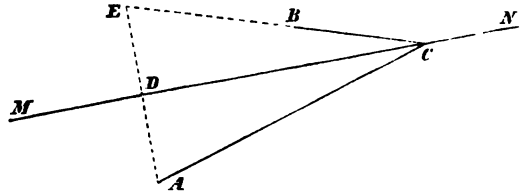


Aufl. Man fälle von A ein Perpendikel auf die Linie I und mache $a'm' = Am'$, von a' ein Perpendikel auf die Linie II und mache $a^2m^2 = a'm^2$ u. s. w., bis zur letzten Linie, verbinde dann den zuletzt gefundenen Punct, hier a^4 mit B, wodurch man den Schnittpunct 4 erhält; diesen mit a^3 verbunden giebt den Schnittpunct 3, diesen wiederum mit a^2 verbunden giebt den Schnittpunct 2; endlich diesen mit a' verbunden giebt den Schnittpunct 1, welcher noch mit A zu verbinden ist. Die Construction bleibt dieselbe, wenn man von dem Puncte B ausgeht, wie in der Figur zu ersehen ist. Geht man von beiden Puncten A und B zugleich aus, so wird man in der Regel weniger Raum zum Construiren bedürfen; in dieser Figur z. B. hätte man nur a', a^2 und b^4, b^3 suchen dürfen, a^2 mit b^3 verbunden giebt

die Schnittpuncte 2 und 3, 3 mit b^4 verbunden giebt den Punct 4, und 2 mit a' verbunden giebt den Punct 1.

Aufgabe 18.

In einer Geraden einen Punct so zu bestimmen, daß wenn man diesen mit zwei außer, aber auf entgegengesetzter Seite dieser Geraden liegenden Puncten verbindet, dadurch gleiche Winkel entstehen.

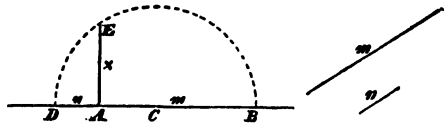


Aufl. Man fälle aus A ein Perpendikel AE auf MN, mache DE=AD und ziehe EB bis MN in C geschnitten wird, und verbinde dann A mit C.

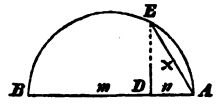
Bemerk. Sind A und B gleich weit von MN entfernt, so werden die Linien EC, AC parallel.

Aufgabe 19.

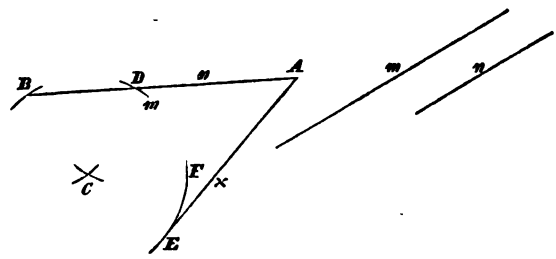
Zu zwei gegebenen Linien m und n die mittlere proportionale Linie zu finden.



Aufl. 1. Man trage auf einer geraden Linie von einem Punct A aus nach der einen Seite AB=m, nach der anderen Seite AD=n auf und beschreibe über DB einen Halbkreis, errichte in A auf DB eine Senkrechte AE bis zur Peripherie, so ist AB:AE=AE:AD, oder m:x=x:n.



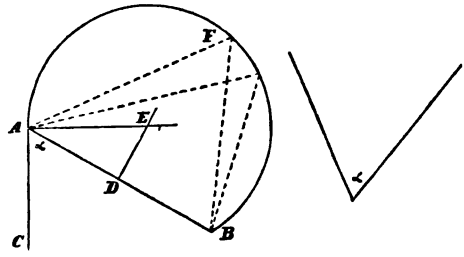
Aufl. 2. Man beschreibe über AB=m einen Halbkreis, mache AD=n und ziehe DE senkrecht auf AB und dann AE, so ist AB:AE=AE:AD oder m:x=x:n.



Aufl. 3. Man mache AB=m, AD=n, mit beliebigem Radius aus B und D die Kreuzbogen bei C, aus C den Bogen EF, und ziehe aus A eine Tangente an EF, so ist AB:AE=AE:AD oder m:x=x:n.

Aufgabe 20.

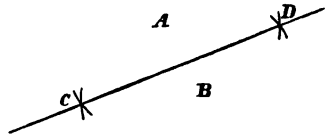
Ueber einer gegebenen Geraden AB einen Kreisbogen zu construiren, der einen gegebenen Winkel α faßt.



Aufl. Man lege an AB den gegebenen Winkel α an, BAC=α, errichte in A ein Perpendikel AE auf AC, im Mittelpunct D von AB ein Perpendikel auf AB und beschreibe aus dem Schnittpuncte beider mit EA den Kreisbogen AFB.

Aufgabe 21.

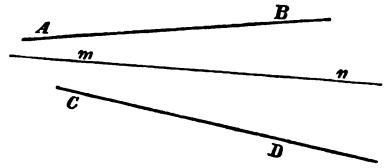
Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche durch zwei gegebene Puncte gehen.



Aufl. Mit beliebigem Radius mache man aus A und B die Kreuzbogen bis C und D und ziehe die Gerade CD, so ist diese der verlangte geometrische Ort.

Aufgabe 22.

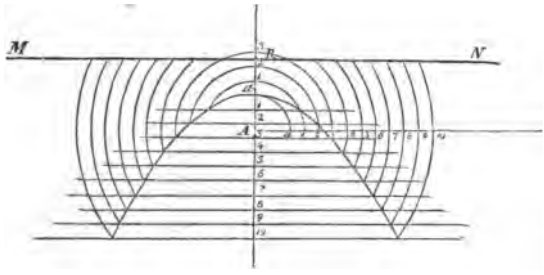
Den geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller Kreiſe zu finden, welche zwei gegebene Geraden berühren.



Aufl. Man halbire den Winkel, den die Linien **AB**, **CD** mit einander bilden durch die Gerade **mn**, ſo iſt dieſe der verlangte geometriſche Ort.

Aufgabe 23.

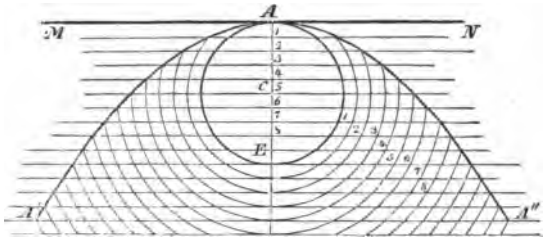
Den geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller Kreiſe zu finden, welche durch einen gegebenen Punct gehen und eine gegebene Gerade berühren.



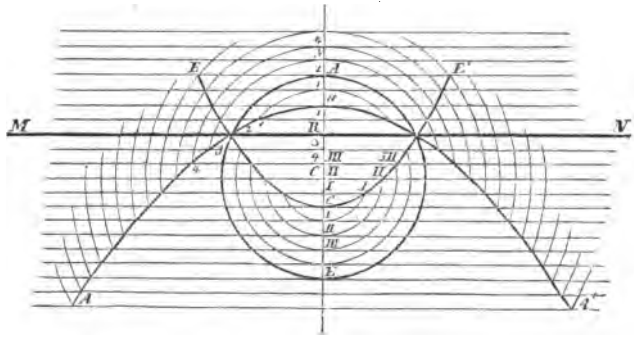
Aufl. Man ziehe durch **A** eine Senkrechte auf **MN**, halbire **AR** in **a** und trage von **a** aus nach beiden Seiten auf **AR** beliebige gleiche Theile auf, ziehe durch die unteren Theilpuncte Parallelen mit **MN**, durch die oberen concentriſchen Kreiſe aus dem Puncte **A**, verbindet man nun die gleichnamigen Schnittpuncte der Parallelen mit den Kreiſen, ſo iſt die dadurch entſtandene Curve der geſuchte geometriſche Ort.

Aufgabe 24.

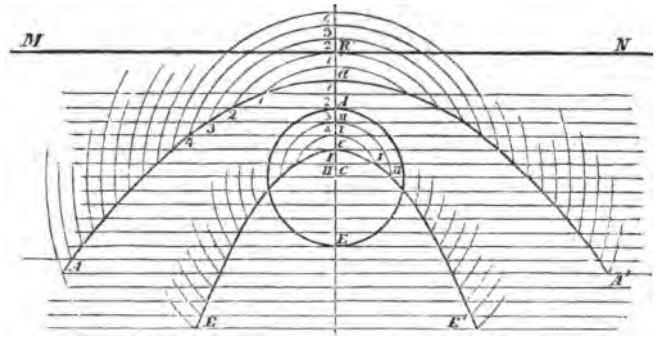
Den geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller Kreiſe zu finden, welche eine gegebene Gerade und einen Kreis berühren.



Aufl. 1. Fall. Wenn die gegebene Gerade den geg. Kreis berührt. Man ziehe durch **C** eine Senkrechte **AE** auf **MN**, so ist diese der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller den gegebenen Kreis einschließend berührenden Kreise. Man ziehe ferner in beliebiger aber gleicher Entfernung Parallelen mit **MN**, und concentrische Kreise aus **C**, so erhält man durch die gleichnamigen Schnittpuncte beider eine Curve **A'AA''**, und diese ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller den gegebenen Kreis ausschließend berührenden Kreise.



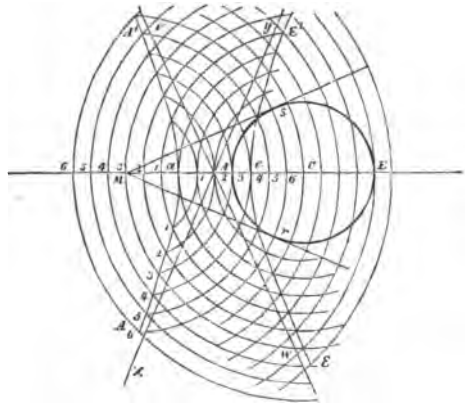
2. Fall. Wenn die gegebene Gerade den geg. Kreis schneidet. Man ziehe durch **C** eine Senkrechte auf **MN**, welche sie in **R** und den gegebenen Kreis in **A** und **E** schneidet, halbire **RA** in **a** und trage von **a** aus beliebige gleiche Theile nach beiden Seiten auf, ziehe durch die Theilpuncte, welche sich der **MN** nähern, Parallelen mit **MN**, durch die, welche sich von **MN** entfernen, concentrische Kreise aus **C** und durch die gleichnamigen Schnittpuncte die Curve **AaA'**, so ist der Theil dieser Curve, welcher innerhalb des Kreises liegt, der geometrische Ort für die einschließenden, der welcher außerhalb liegt für die ausschließenden Kreise. Man halbire ferner **RE** in **e** und verfahre eben so wie bei dem Puncte **a**.



3. Fall. Wenn die geg. Gerade ganz außerhalb des geg. Kr. liegt. Man ziehe aus C eine Senkrechte CR auf MN, welche den Kreis in A und E ſchneidet. Halbirt man nun AR in a und wendet daſſelbe Verfahren wie im 2. Falle an, ſo erhält man die Curve AaA' als geometriſchen Ort für alle ausſchließenden Kreiſe. Halbirt man ER in e, ſo erhält man durch dieſelbe Conſtruction wie bei dem Puncte a die Curve EeE' als geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller einſchließenden Kreiſe.

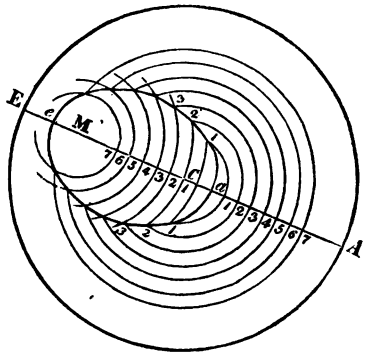
Aufgabe 25.

Den geometriſchen Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe zu finden, welche durch einen gegebenen Punct gehen und einen gegebenen Kreis berühren.



Aufl. 1. Fall. Wenn der gegebene Punct außerhalb des gegebenen Kreiſes liegt. Man ziehe MC, welche den gegebenen Kreis in

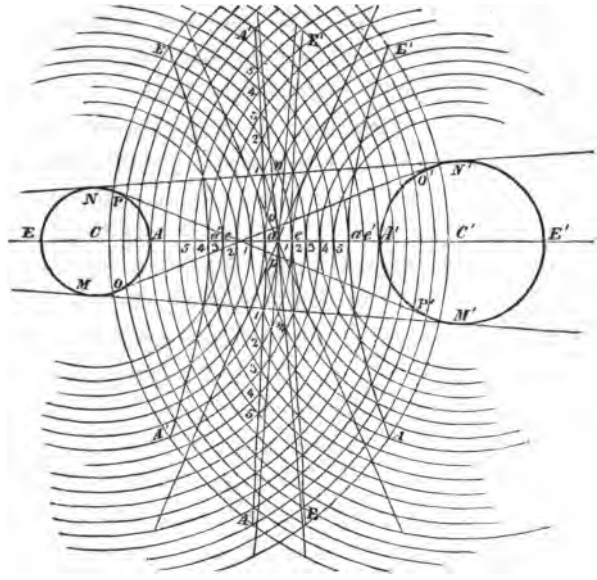
A und E schneidet, halbire MA in a, trage nach beiden Seiten von a beliebige gleiche Theile auf und beschreibe aus M und C concentrische Kreise, so geben die gleichnamigen Schnittpuncte die Curve AaA' als geometrischen Ort für alle Mittelpuncte der Kreise, welche den gegebenen ausschließend berühren. Sollen die Kreise den gegebenen einschließend berühren, so halbire man ME in e und verfahre eben so wie bei dem Puncte a, wodurch man die Curve EeE' erhält. Zieht man aus M an den Kreis die Tangente Mr, so kann man diese als aus- und auch als einschließenden Kreis betrachten; die Mittelpuncte dieser Kreise werden in der Mittellinie xy zwischen M und r in unendlicher Entfernung liegen, woraus man abnehmen kann, daß die Curvenzweige aA, eE' nicht über diese Linie hinaus gehen werden, sondern sich nur stets derselben nähern. Dasselbe gilt für die Tangente Ms, die Mittellinie vw und die Curvenzweige aA' und eE.



2. Fall. Wenn der gegebene Punct M innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Man ziehe MC, welche den Kreis in A und E schneidet, halbire MA in a, trage von a nach beiden Seiten beliebige gleiche Theile auf und beschreibe aus M und C durch die Theilpuncte concentrische Kreise, so erhält man durch die gleichnamigen Schnittpuncte dieser Kreise Puncte zu einer Curve als gesuchten geometrischen Ort. Eben so hätte man ME in e halbiren und eben so verfahren können.

Aufgabe 26.

Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche zwei gegebene Kreise berühren.



Aufl. 1. Fall. Wenn beide gegebene Kreise ganz aus einander liegen.

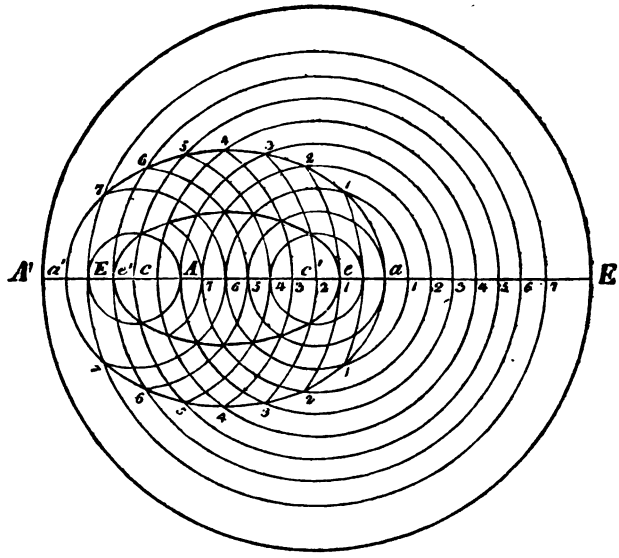
I. Sollen beide Kreise ausschließend berührt werden, so halbire man AA′ in a, trage von a aus nach beiden Seiten beliebige gleiche Theile auf und beschreibe aus C und C′ durch diese Theilpuncte concentrische Kreise, so erhält man durch die Schnittpuncte der gleichnamigen Kreise die Curve AaA′ als geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller ausschließenden Kreise.

II. Sollen beide Kreise einschließend berührt werden, so halbire man EE′ in e, verfahre eben so wie in I., und man erhält die Curve EeE′.

III. Soll der größere Kreis ausschließend, der kleinere einschließend berührt werden, so halbire man A′E in a′e, wende dasselbe Verfahren wie in I. an, und man erhält die Curve A′a′cE.

IV. Soll der größere Kreis einschließend der kleinere ausschließend berührt werden, so halbire man AE′ in ae′, verfahre wie in I., und man erhält die Curve Aae′E′.

Zieht man die Tangente MM', ſo kann man dieſe als den größten aus- und einſchließenden Kreis betrachten, deſſen Mittelpunct in der Mittellinie zwiſchen M und M', die durch m geht, in unendlicher Entfernung liegen wird, woraus man abnehmen kann, daß die Curvenzweige Aa' und eE' immer auf einer und derſelben Seite dieſer Mittellinie bleiben werden, in der ſie ſich befinden. Daſſelbe gilt von der Tangente NN', ihrer Mittellinie durch n und den Curvenzweigen aA' und eE. Zieht man die Tangente OO', ſo kann man dieſe als den größten, den kleineren Kreis einſchließenden, den größeren ausſchließenden, Kreis betrachten, deſſen Mittelpunct in unendlicher Entfernung in der Mittellinie durch o liegt; die Curvenzweige a'eE und ae'A werden alſo nie mit dieſer Mittellinie zwiſchen O und O' zuſammenfallen oder ſich ſchneiden. Daſſelbe gilt von der Tangente PP' ihrer Mittellinie durch p und den Curvenzweigen a'eA' und ae'E'. Sind beide Kreiſe einander gleich, ſo fällt der Punct a mit dem Puncte e zuſammen, und die beiden Curven AaA' und EeE' gehen zuſammen in die Mittellinie zwiſchen A und A' über. Schneiden ſich hingegen beide Kreiſe, ſo gehen die von einander getrennten Curven A'a'eE, Aae'E' in eine geſchloſſene Curve über, die durch die Schnittpuncte beider Kreiſe hindurchgeht. Berühren ſich endlich die beiden Kreiſe, ſo geht dieſe geſchloſſene Curve in die gerade Linie über, welche beide Mittelpuncte C und C' mit einander verbindet.

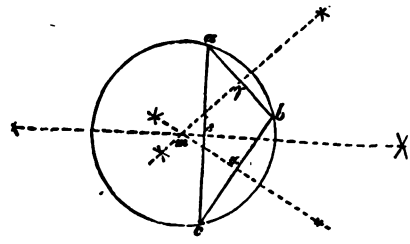


2. Fall. Wenn der eine Kreis ganz innerhalb des zweiten gegebenen Kreises liegt. Man verbinde die Mittelpuncte beider Kreise c, c', und halbire, wenn die Kreise den kleineren ausschließend berühren sollen, AE' in a, trage zu beiden Seiten von a beliebige gleiche Theile auf und beschreibe aus c und c' durch die Theilpuncte concentrische Kreise, so erhält man durch die Schnittpuncte der gleichnamigen Kreise die Curve a 1 2 3 ꝛc. Da die Curve durch den Mittelpunct von A'E durch a' gehen muß, so hätte man bei diesem Puncte eben so, wie bei dem Puncte a verfahren können, um dieselbe Curve zu erhalten. Sollen die Kreise den kleineren einschließend berühren, so halbire man EE' in e oder AA' in e' und wende dasselbe obige Verfahren an, so erhält man die kleinere in sich zurücklaufende Curve ee'.

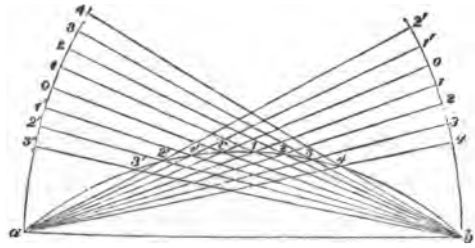
Mit welchem Vortheile man die hier gesuchten geometrischen Oerter zur Auflösung vieler Aufgaben anwendet, wird in den nächstfolgenden Aufgaben gezeigt werden.

Aufgabe 27.

Durch drei gegebene Puncte oder um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.



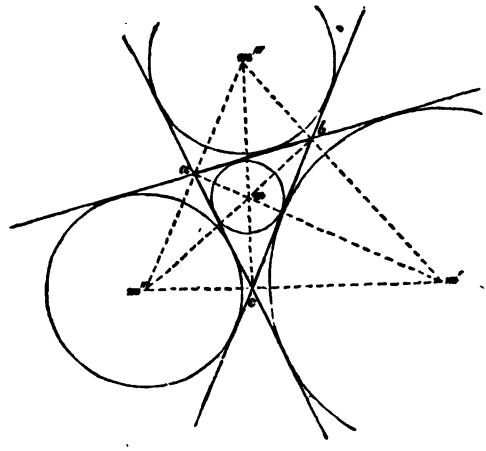
Aufl. 1. Man ziehe zwiſchen ab und bc die Mittellinien, ſo iſt der Schnittpunct beider in m der Mittelpunct des geſuchten Kreiſes. Man würde auch zu demſelben Puncte m gelangen, wenn man zwiſchen ab und ac die Mittellinien zöge; d. h. alſo die 3 Mittellinien zwiſchen 3 Puncten, oder die 3 Lothe durch die Mittelpuncte der Seiten eines Dreiecks ſchneiden ſich in einem und demſelben Puncte m.



Aufl. 2. Oft wird nur verlangt, einen oder mehrere Puncte des Kreisbogens zu conſtruiren, der durch drei gegebene Puncte geht und von der größten Entfernung unter ihnen begrenzt wird, und daß dieſe drei Puncte ſo nahe in gerader Linie liegen, daß der Radius des geſuchten Kreisbogens nicht mehr mit dem Zirkel gefaßt werden kann. In dieſem Falle beſchreibe man aus a und b mit ab zwei Bogen nach der Seite hin, wo der dritte Punct c liegt, ziehe ac und bc, bis ſie die Bogen im Puncte o ſchneiden, trage von dem Puncte o aus nach beiden Seiten beliebige gleiche Theile auf und verbinde a mit einem Theilpuncte auf dem einen Kreisbogen über o; b mit demſelben Theilpuncte auf dem anderen Bogen unter o, und umgekehrt, ſo iſt der Schnittpunct dieſer beiden Geraden ein Punct des verlangten Kreisbogens.

Aufgabe 28.

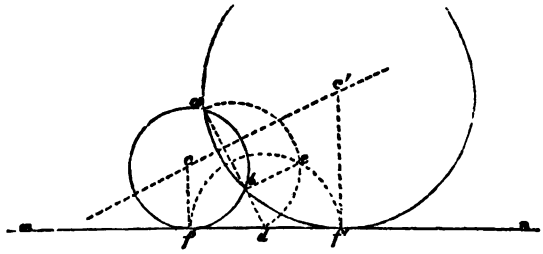
Einen Kreis zu conſtruiren, der drei gegebene Linien oder die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt.



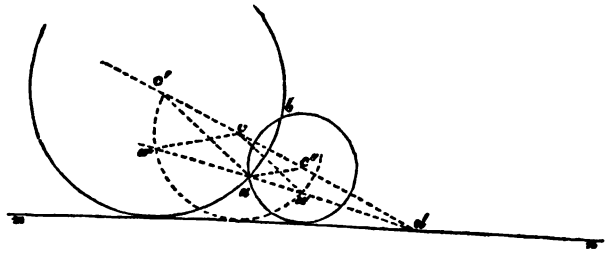
Aufl. Man halbire bac durch am′, ſo wird in dieſer Linie als geometriſcher Ort (Aufg. 22.) der Mittelpunct des geſuchten Kreiſes liegen, eben ſo wird auch der Mittelpunct in bm″, oder cm‴ als Halbirungslinien der Winkel abc, acb liegen müſſen, mithin der Schnittpunct m ein Mittelpunct des geſuchten Kreiſes ſein. Halbirt man die Außenwinkel des gegebenen Dreiecks durch die Linien m′m″, m′m‴, m″m‴, ſo werden auch in ihnen Mittelpuncte der geſuchten Kreiſe liegen müſſen, mithin ihre Schnittpuncte m′, m″, m‴ dieſelben ergeben. Man kann hier leicht den Satz entnehmen, daß die Halbirungslinien der inneren Winkel ſowohl als auch der Außenwinkel eines Dreiecks ſich immer in einem und demſelben Puncte ſchneiden müſſen.

Aufgabe 29.

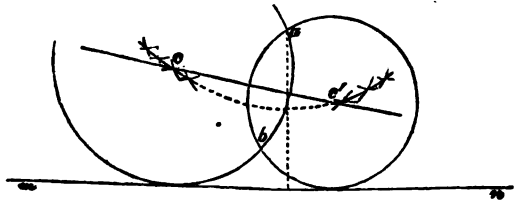
Einen Kreis zu beſchreiben, der durch zwei gegebene Puncte geht und eine gegebene Gerade mn berührt.



Aufl. 1. Man ziehe zwiſchen a und b die Mittellinie cc', ſo werden in dieſer die Mittelpuncte liegen müſſen. Um ſie zu finden, verlängere man ab, bis mn in d geſchnitten wird, errichte über ad einen Halbkreis und ziehe be ſenkrecht auf ab, aus d ſchneide man mit de mn in f und f' und errichte in f und f' Senkrechte; wo dieſe die Mittellinie in c und c' ſchneiden, hat man die Mittelpuncte der verlangten Kreiſe.



Aufl. 2. Man ziehe zwiſchen a und b die Mittellinie c'c'', bis ſie mn in d ſchneidet, beſchreibe aus einem beliebigen Puncte c derſelben einen Kreis, welcher mn berührt, und verbinde einen der beiden gegebenen Puncte, etwa a, mit d; wo dieſe den Kreis in a' und a'' ſchneidet, ziehe man aus a Parallele mit a'c und a''c; die Schnittpuncte dieſer mit d. Mittellinie geben die Mittelpuncte c', c'' der verlangten Kreiſe.

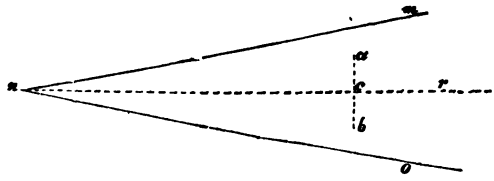


Aufl. 3. Man ziehe die Mittellinie zwiſchen a und b, ſuche nach
Aufg. 23. den geometriſchen Ort der Mittelpuncte der Kreiſe, welche durch

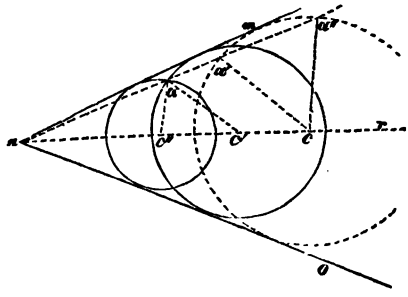
einen der beiden gegebenen Puncte, etwa a, gehen und mn berühren, wo dieſer die Mittellinie in c und c′ ſchneidet, ſind die Mittelpuncte der verlangten Kreiſe.

Aufgabe 30.

Einen Kreis zu beſchreiben, der durch einen gegebenen Punct a geht und zwei gegebene Gerade berührt.



Aufl. 1. Man ziehe zwiſchen mn und no die Mittellinie nr, aus a eine Senkrechte auf nr, und cb = ca gemacht, ſo iſt b ein Punct, durch welchen der geſuchte Kreis gleichfalls hindurch gehen muß, und ſo wird dieſe Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

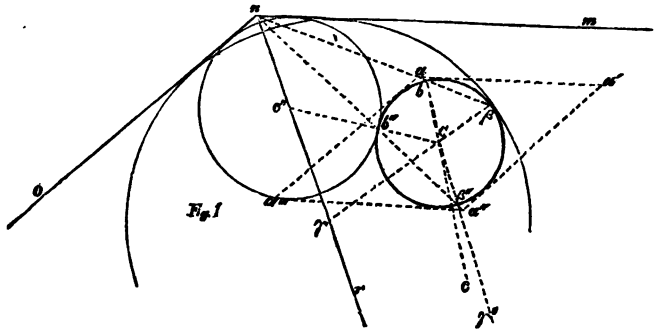


Aufl. 2. Man ziehe zwiſchen mn und no die Mittellinie nr; aus einem beliebigen Puncte c in derſelben beſchreibe man einen Kreis, welcher mn berührt und ziehe na, die ihn in a′ und a″ ſchneidet. Aus a ziehe man ac′ parallel mit a′c; ac″ parallel mit a″c, ſo erhält man in c′, c″ die Mittelpuncte der verlangten Kreiſe.

Aufl. 3. Man ſuche den geometriſchen Ort der Mittelpuncte aller Kreiſe, welche durch a gehen und eine der Linien, etwa no, berühren; wo dieſer die Mittellinie ſchneidet, erhält man die Puncte c′ und c″ Man ſehe Aufg. 29., Aufl. 3.

Aufgabe 31.

Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Geraden berührt.



Aufl. 1. Man ziehe an den gegebenen Kreis mit jeder der gegebenen Geraden zwei parallele Tangenten, die sich in den Puncten a, a′, a″, a‴ schneiden werden; verbindet man nun diese vier Puncte mit dem Schnittpuncte beider Linien n, so werden diese vier Linien na, na′, na″, na‴ entweder alle, oder nur zwei von ihnen, den gegebenen Kreis im ersten Falle in 8, im zweiten in 4 Puncten treffen, welches die Berührungspuncte des gegebenen Kreises mit eben so viel auflösenden Kreisen seyn werden. Zieht man nun die Mittellinie nr zwischen mn und no, in welcher alle Mittelpuncte der gesuchten Kreise liegen müssen, und durch C und die gefundenen Berührungspuncte b, β, b″, β″ die Geraden Cb, Cβ, Cb″, Cβ″, bis sie nr in c, γ, c″, γ″ schneiden, so hat man dadurch die Mittelpuncte der gesuchten Kreise. Schneidet jede gegebene Gerade den Kreis, so schneiden ihn auch die Linien na, na′, na″, na‴, und die Zahl der auflösenden Kreise ist dann am größten, sie beträgt 8. Man sehe Fig. 2.

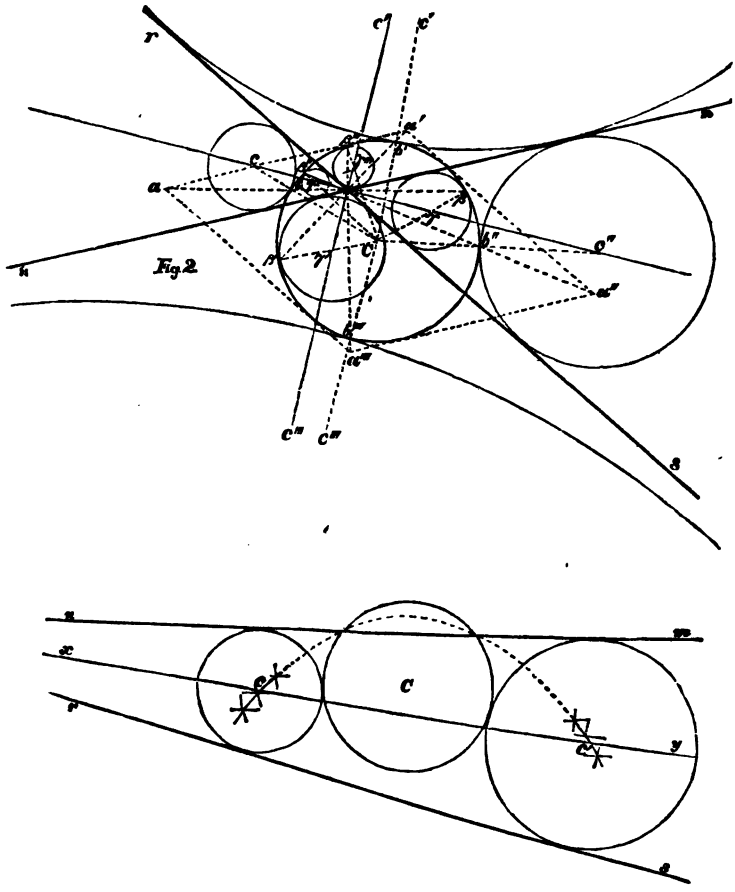


Fig. 2.

Aufl. 2. Man ziehe die Mittellinie xy zwiſchen mn und rs, und ſuche nach Aufg. 24. den geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller Kreiſe, welche eine der gegebenen Geraden, etwa mn und den gegebenen Kreis berühren; wo dieſer xy in c und c' ſchneidet, hat man die Mittelpuncte der geſuchten Kreiſe.

Aufgabe 32.

Einen Kreis zu beſchreiben, der durch einen gegebenen Punct a geht, einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade mn berührt.

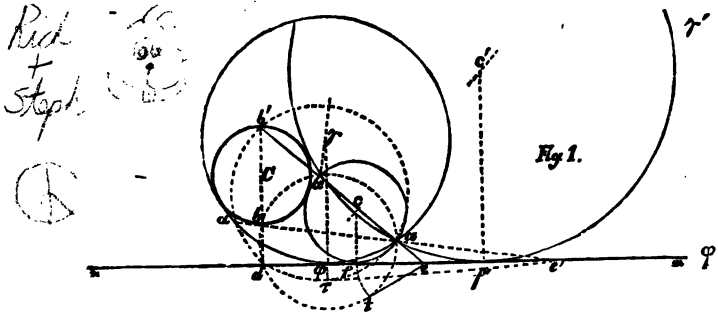


Fig 1.

Aufl. 1. Man ziehe durch den Mittelpunct C des gegebenen Kreiſes eine Senkrechte auf mn, die den Kreis in b, b', die Gerade mn in d ſchneidet. Soll nun der geſuchte Kreis den gegebenen ausſchließend berühren, ſo beſchreibe man durch d, den gegebenen Punct a und den mn näher liegenden Punct b einen Kreis und ziehe b'a; wo dieſe den Kreis in α' ſchneidet, hat man einen zweiten Punct gefunden, durch welchen auch der geſuchte Kreis gehen muß, und ſonach dieſe Aufgabe auf Aufg. 29. zurückgeführt. Man wird alſo zu den Mittelpuncten der geſuchten Kreiſe gelangen, wenn man b'a bis e verlängert, aus e eine Tangente et zieht und ef=ef'=et macht, in f und f' auf mn Perpendikel errichtet, bis dieſe von der Mittellinie zwiſchen α' und a in c und c' geſchnitten werden. Soll der geſuchte Kreis den gegebenen einſchließend berühren, ſo iſt die Conſtruction dieſelbe, nur daß man b mit b' vertauſcht, d. h. man beſchreibt durch d, den gegebenen Punct a und den entfernter liegenden Punct b' einen Kreis, zieht ba bis α, ſo iſt α der Punct, durch welchen der geſuchte Kreis gleichfalls gehen wird, und man findet γ und γ ganz eben ſo wie c und c'.

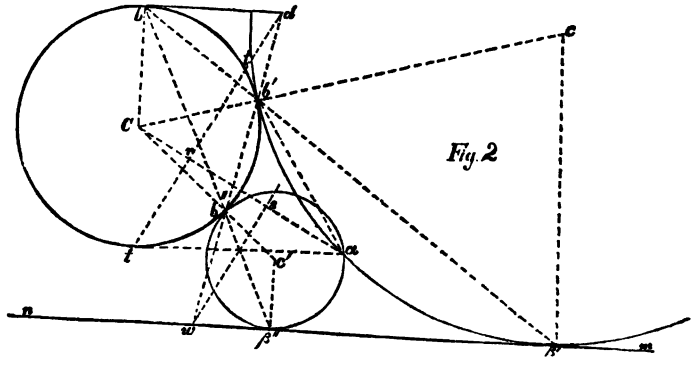


Fig 2

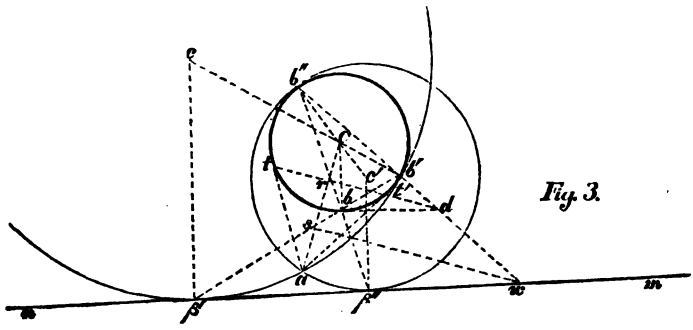


Fig. 3.

Aufl. 2. Man ziehe durch den Mittelpunct C des gegebenen Kreises einen auf mn senkrechten Radius Cb, und zwar von C aus in Bezug auf mn nach oben, wenn der gegebene Kreis ausschließend, Fig. 2., nach unten zu, wenn er einschließend berührt, Fig. 3., werden soll; und ziehe durch den Punct b eine Tangente bd; von a aus ziehe man zwei Tangenten, und durch die Berührungspuncte t, t' die Gerade tt', bis sie bd in d schneidet. Im Mittelpunct s von ar ziehe man eine Parallele mit tt' bis mn in w geschnitten wird, und ziehe wd, bis sie den Kreis in b' und b'' schneidet, so hat man dadurch die Berührungspuncte der gesuchten Kreise mit dem gegebenen gefunden; um nun noch ihre Berührungspuncte mit mn zu bestimmen, ziehe man bb', bb'', bis mn in β' und β'' geschnitten wird. Zieht man nun Cb', Cb'', bis sie von der Senkrechten in β', β'' auf mn geschnitten werden, so erhält man die Mittelpuncte c, c'.

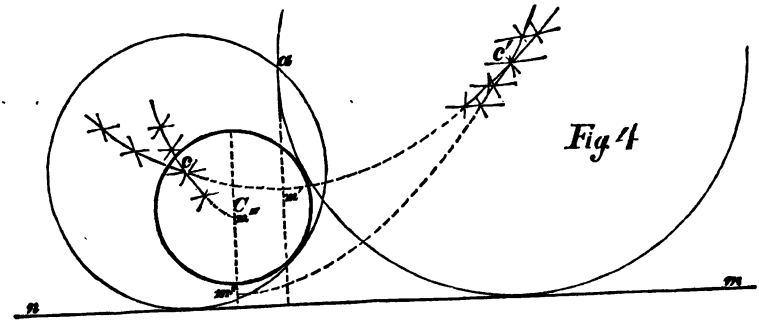


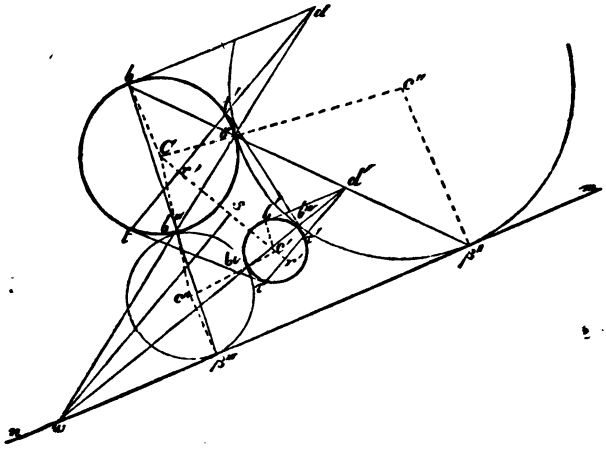
Fig. 4

Aufl. 3. Man suche nach Aufg. 23. den geometrischen Ort cm'c' der Mittelpuncte aller Kreise, welche durch a gehen und mn

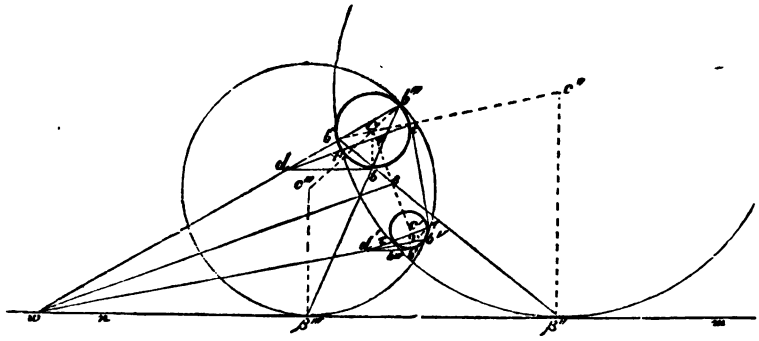
berühren, nach Aufg. 24. den geometrischen Ort m″c′ für die ausschließenden, m‴c für die einschließende, den gegebenen Kreis und mn berührenden Kreise; wo sich diese Curven in c und c′ schneiden, erhält man die Mittelpuncte für einen aus- und für einen einschließenden Kreis.

Aufgabe 33.

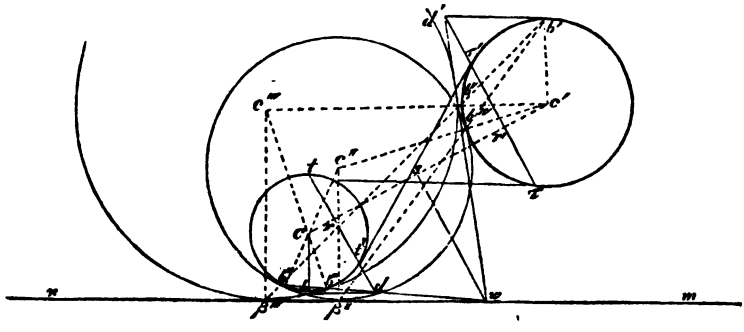
Einen Kreis zu beschreiben, der eine Gerade und zwei Kreise berührt.



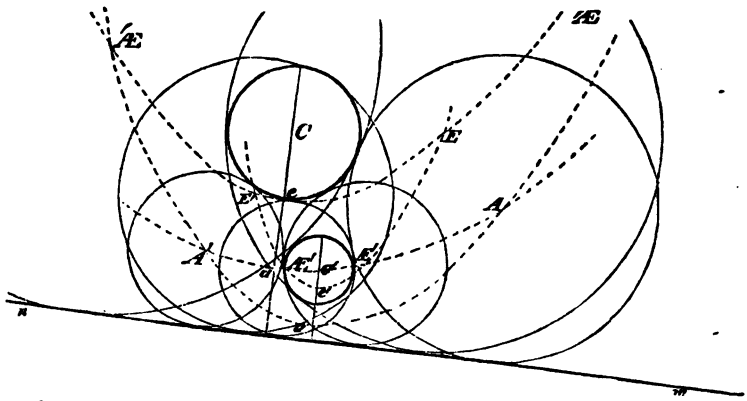
Aufl. 1. 1. Fall. Beide Kreise sollen ausschließend berührt werden. Man ziehe durch die Mittelpuncte C, C′ der beiden gegebenen Kreise die Radien Cb, C′b′, und zwar in Bezug auf mn nach entgegensetzter Richtung, durch b und b′ die Tangenten bd, b′d′, lege an beide Kreise die Tangenten tτ, t′τ′, so daß ihr Schnittpunct in die Verlängerung von CC′ fällt, und verbinde die Berührungspuncte t, t′; τ, τ′, bis bd in d, b′d′ in d′ geschnitten wird. Durch s im Mittelpunct von rr′ ziehe man eine Parallele mit tt′, bis sie mn in w schneidet, und ziehe wd, wd′, wodurch man die Schnittpuncte b″, b‴, bᴵᵛ, bᵛ als Berührungspuncte der gesuchten Kreise mit den gegebenen erhält. Zieht man nun bb″ bis β″, bb‴ bis β‴, so erhält man dadurch die Berührungspuncte in der Geraden mn, wodurch sich nun leicht die Mittelpuncte c″, c‴ ergeben. Man vergleiche diese Construction mit Fig. 2. in Aufg. 32.



2. Fall. Beide Kreiſe ſollen einſchließend berührt werden. Die Conſtruction iſt ganz dieſelbe wie die vorige, nur mit dem Unterſchiede, daß die beiden Radien Cb, C′b′ in Bezug auf mn nicht nach entgegengeſetzter, ſondern nach derſelben Richtung, nach mn zu gezogen werden.



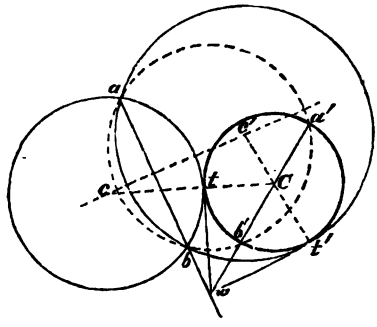
3. Fall. Der eine Kreis ſoll einſchließend, der andere ausſchließend berührt werden. Die Conſtruction iſt wieder dieſelbe wie in dem erſten Falle, nur mit dem Unterſchiede, daß die beiden Radien Cb, C′b′ nach entgegengeſetzten Richtungen gezogen werden müſſen, und die beiden Tangenten tτ, t′τ′ ſo zu legen ſind, daß ihr Schnittpunct zwiſchen C und C′ fällt.



Aufl. 2. Man construire nach Aufg. 24. die geometrischen Oerter der Mittelpuncte aller Kreise, welche die Gerade mn und jeden der gegebenen Kreise aus- und einschließend berühren, so ergeben die Schnittpuncte dieser Curven die Mittelp. der verlangten Kreise, nämlich:
A, A′ als Mittelpuncte für die beiden ausschließend,
E, E′ " " " " " einschließend,
Æ′, Æ′ " " " den größeren Kreis aus-, den kleineren ein-,
′Æ, ′Æ " " " " " " ein-, " " aus-
schließend berührenden Kreise.

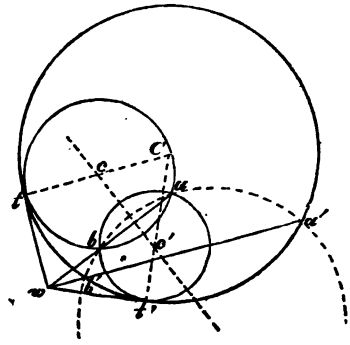
Aufgabe 34.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Puncte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

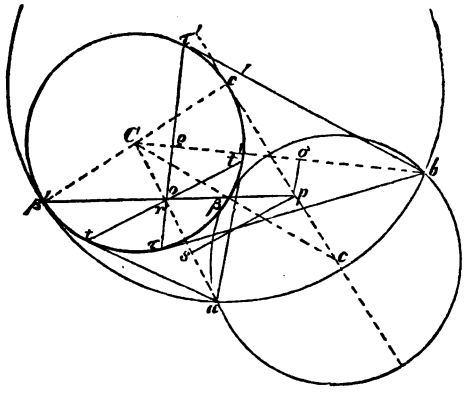


Aufl. 1. 1. Fall. Wenn beide Puncte a und b außerhalb des Kreises liegen. Man ziehe ab, lege durch die Puncte a und b einen beliebigen, jedoch den gegebenen in a′ und b′ schneidenden Kreis,

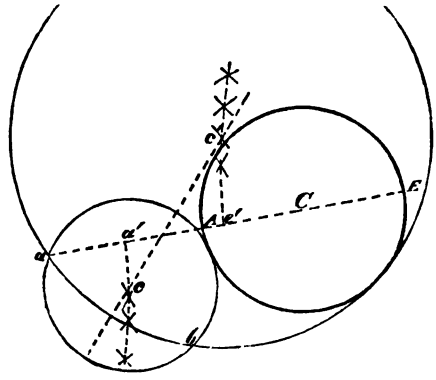
und ziehe a'b' bis w, aus w die Tangenten wt, wt', dann Ct bis c, Ct' bis c', so sind c, c' die gesuchten Mittelpuncte.



2. Fall. Wenn die beiden gegebenen Puncte a und b innerhalb des Kreises liegen. Die Construction ist ganz dieselbe wie im ersten Falle.



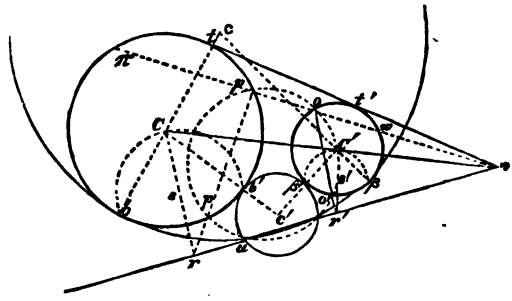
Aufl. 2. Für den 1. Fall. Man ziehe die Mittellinie cc' zwischen a und b, so werden in dieser die Mittelpuncte liegen. Zieht man nun von a die Tangenten at, at', von b die Tangenten bτ, bτ' und verbindet t mit t', τ mit τ', so erhält man den Punct o. Durch die Mittelpuncte s und σ von ar und bϱ ziehe man Parallele mit tt' und ττ', und man erhält den Punct p. Zieht man nun op, so schneidet diese den Kreis in β und β', welches die Berührungspuncte der gesuchten Kreise mit dem gegebenen sind. Zieht man daher Cβ bis c, Cβ' bis c', so sind c und c' die Mittelpuncte der verlangten Kreise.



Aufl. 3. Man ſuche nach Aufg. 25. den geometriſchen Ort für die Mittelpuncte aller Kreiſe, welche den gegebenen C berühren und durch einen der beiden gegebenen Puncte, etwa a, gehen, und ziehe zwiſchen a und b die Mittellinie, wo dieſe die Curven in c und c' ſchneidet, hat man die Mittelpuncte der verlangten Kreiſe.

Aufgabe 35.

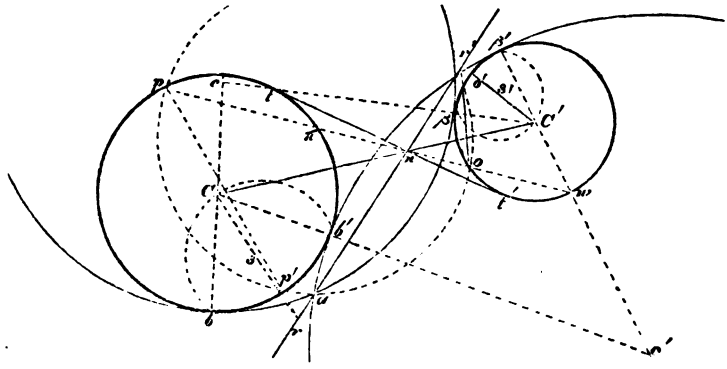
Einen Kreis zu beſchreiben, der durch einen gegebenen Punct geht und zwei gegebene Kreiſe berührt.



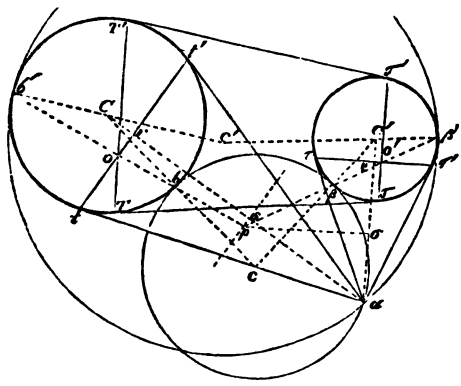
Aufl. 1. 1. Fall. Wenn der geſuchte Kreis beide gegebene aus- oder einſchließend berühren ſoll. Man ziehe CC', lege an beide Kreiſe die Tangente tt' ſo, daß ſie CC' in der Verlängerung n trifft, und ziehe aus n eine beliebige Linie, welche den einen Kreis in o, ω, den anderen in p, π ſchneidet; durch die Puncte o, p oder

π, ω und den gegebenen a lege man einen Kreis, wodurch man die Puncte p' und o' erhält, ferner ziehe man pp', oo' und an, so ergeben sich die Puncte r und r'; zieht man nun Cr und C'r', halbirt dieselben in s und s' und schneidet aus s mit sC in b und b', aus s' mit s'C' in β, β', so sind b, b', β, β' die Berührungspuncte; zieht man daher Cb, C'β, so ist der Schnittpunct c der eine, und der Schnittpunct c' von Cb' und C'β' der andere Mittelpunct der gesuchten Kreise.

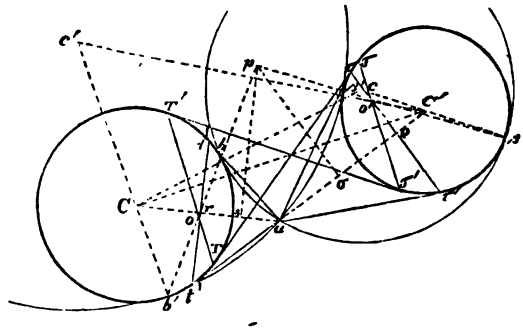
Man hätte auch die Berührungspuncte β, β' dadurch erhalten können, wenn man bn und b'n gezogen hätte, da b, β, n und b', β', n in gerader Linie liegen müssen.



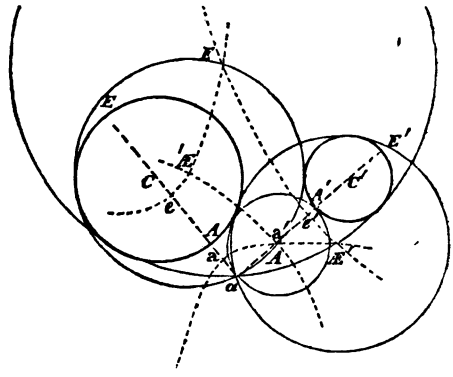
2. Fall. Wenn der gesuchte Kreis den einen gegebenen aus-, den anderen einschließend berühren soll. Die Auflösung ist ganz dieselbe wie im ersten Falle, nur mit dem Unterschiede, daß man hier die Tangente t, t' so ziehen muß, daß ihr Schnittpunct n mit CC' zwischen C und C' fällt. Ferner, wie man dort die Puncte o und p oder ω und π als die beiden nächsten oder entferntsten zur Auflösung nehmen mußte, man in diesem Falle den einen näheren mit dem anderen entfernteren, also o mit p oder ω mit π und den gegebenen a, zu dem Hülfskreise anwenden wird. Auch hier liegen b, n und β wie b', n und β' in einer geraden Linie.



Aufl. 2. 1. Fall. Man ziehe von dem gegebenen Puncte a an beide Kreiſe die Tangenten und verbinde die Berührungspuncte tt′, ττ′, ferner ziehe man an beide Kreiſe die gemeinſchaftlichen Tangenten Tτ, T′τ′ ſo, daß ihr Schnittpunct in die Verlängerung von CC′ fällt, und verbinde gleichfalls die Berührungspuncte, ſo ergiebt ſich in dem einen Kreiſe der Schnittpunct o, im andern o′, halbire nun ar in s, aϱ in σ, ziehe durch s und σ Parallele mit tt′, ττ′, ſo ergiebt ſich dadurch der Schnittpunct p. Zieht man nun po, po′, bis der eine Kreis in b und b′, der andere in β und β′ geſchnitten wird, ſo ſind b, β und b′, β′ die zuſammengehörigen Berührungspuncte der geſuchten Kreiſe, wodurch ſich die Mittelpuncte c und c′ durch Ziehung von Cb, C′β und Cb′, C′β′ von ſelbſt ergeben.



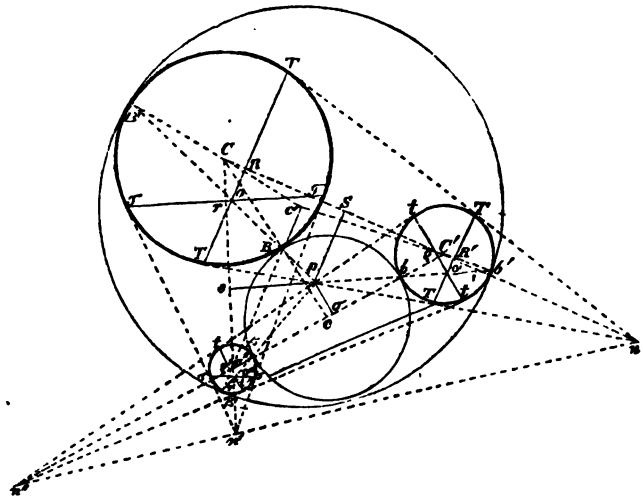
2. Fall. Die Construction ist ganz dieselbe wie im ersten Falle, nur mit dem Unterschiede, daß die an beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten so gezogen werden müssen, daß ihr Schnittpunct zwischen C und C′ fällt.



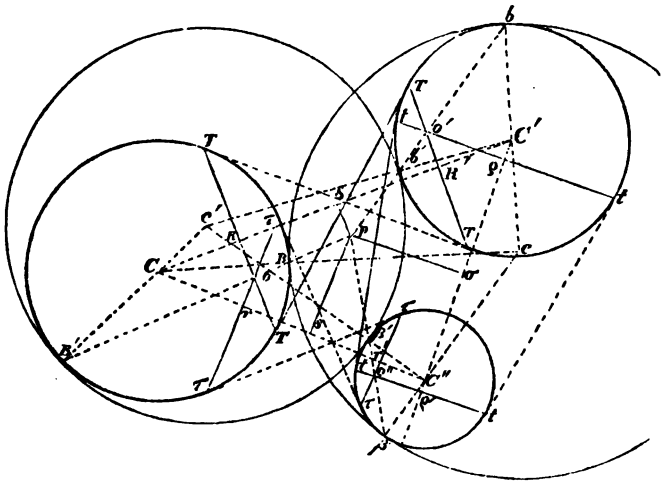
Aufl. 3. Man suche nach Aufg. 25. die geometrischen Oerter für die Mittelpuncte aller Kreise, welche durch den gegebenen Punct a gehen und sowohl den einen wie den anderen Kreis berühren, so erhält man in den Durchschnittspuncten dieser Curven in A und E die Mittelpuncte der gesuchten Kreise für den ersten Fall, in 'Æ und Æ′ für den zweiten. Man hätte zur Auflösung auch die Aufgaben 25. und 26. zusammen anwenden können.

Aufgabe 36.

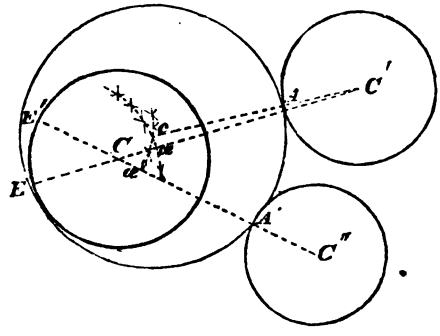
Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berühre.



Aufl. 1. 1. Fall. Wenn der geſuchte Kreis die drei gegebenen aus- oder einſchließend berühren ſoll. Man ziehe an je zwei Kreiſe die gemeinſchaftlichen Tangenten, ſo daß ihr Schnittpunct in die Verlängerung von cc fällt, und verbinde die Berührungspuncte, ſo erhält man die Puncte o, o′, o″; ferner halbire man RR′ in S, rr′ in s und ϱϱ′ in σ, und ziehe durch die Halbirungspuncte Parallele mit TT, ττ und tt, ſo erhält man den Punct p; zieht man nun po, po′, po″, ſo ergeben ſich die Berührungspuncte B, b, β und B′, b′, β′, und der Schnittpunct von CB und C′b bildet den Mittelpunct c, von CB′ und C′b′ den Mittelpunct c′. Die drei Schnittpuncte n, n′, n″ der gemeinſchaftlichen Tangenten ſo wie die Puncte B, b, n; B′, b′, n; ferner B, β, n′; B′, β′, n′, und b, β, n″; b′, β′, n″ müſſen immer in einer geraden Linie liegen, und dies kann daher als Controlle für die Genauigkeit der Conſtruction angeſehen werden.



2. Fall. Wenn der gesuchte Kreis zwei der gegebenen einschließend den dritten ausschließend oder umgekehrt berühren soll. Die Construction ist ganz dieselbe wie im ersten Falle, nur mit dem Unterschiede, daß man an den beiden Kreisen, von welchen der eine aus- der andere einschließend berührt werden soll, die gemeinschaftliche Tangente zwischen Cc fällt.

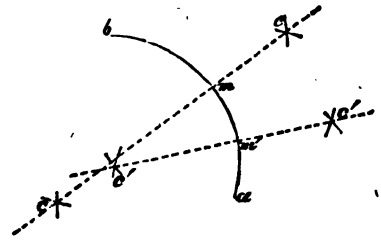


Aufl. 2. Soll z. B. der Kreis C einschließend, die Kreise C', C'' ausschließend berührt werden, so suche man nach Aufg. 26. die geometrischen Oerter für die Mittelpuncte der Kreise, welche C einschließend, C', C'' ausschließend berühren, so ist der Schnittpunct c dieser beiden Curven der Mittelpunct des gesuchten Kreises.

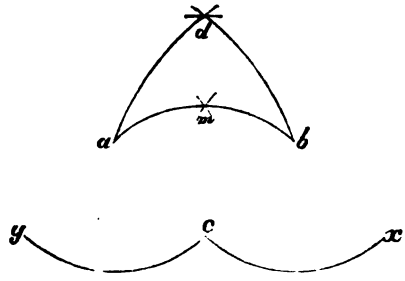
Bemerkung. In den Aufgaben von 21 bis 36 sind alle Fälle zusammengestellt worden, in denen verlangt wird, den Mittelpunct eines Kreises zu construiren, der entweder zwei oder drei von den gegebenen Dingen, Punct, gerade Linie und Kreis, berühre; und man hat in den Aufgaben 21 bis 26 gesehen, daß wenn der gesuchte Kreis die Bedingung erfüllen soll, nur zwei dieser Dinge zu berühren, es unendlich viele Kreise giebt, deren Mittelpuncte jedoch alle entweder in einer geraden oder krummen Linie liegen, und diese gerade oder krumme Linie eben der geometrische Ort genannt worden ist. Die Construction dieser geometrischen Oerter ist nun für alle aufgestellten Fälle mit sehr geringer Veränderung stets dieselbe und so leicht, daß sie dem Gedächtnisse dessen, der sich einmal mit ihr vertraut gemacht hat, selten wieder entschwinden wird, und daher ihre Anwendung für die Praxis des Construirens am meisten zu empfehlen. Mit welcher Leichtigkeit sich die Aufgaben von 27 bis 36, wo der gesuchte Kreis drei der gegebenen Bedingungen erfüllen soll, und dadurch zu einer völlig bestimmten Aufgabe wird, lösen lassen, wird man leicht einsehen, wenn man die vorangestellten streng mathematischen Auflösungen mit diesen vergleicht. In der Praxis wie bei mehreren Aufgaben aus der beschreibenden Geometrie, wird am häufigsten in den Fällen, wo mehrere Kreise der gestellten Aufgabe genügen, nur einer derselben verlangt, und in diesem speciellen Falle wird man oft, da der Zeichner im Stande sein wird, immer im voraus schon ungefähr den Ort des Mittelpuncts anzugeben, in dieser Gegend auch nur einen Theil der Curve des geometrischen Ortes suchen, und mit zwei, höchstens drei kleinen Hülfsbögen ausreichen. Hat man nun diese parallelen Hülfslinien, entweder Gerade oder concentrische Kreise, nahe aneinander genommen, so ist es meistens erlaubt, den Theil der Curve zwischen zwei aufeinander folgenden Puncten als gerade Linien anzunehmen. Endlich mag noch erwähnt werden, daß in den Fällen, wo die Lage der Puncte, Linien und Kreise, welche berührt werden sollen, von der Art ist, daß die mathematisch genaue Construction nicht auf dem Raume des vorhandenen Papieres ausgeführt werden kann, da häufig gewisse zur Construction nöthige Schnittpuncte weit über den Rand des Papieres hinausfallen, die Auflösungsmethode durch geometrische Oerter stets den geringsten Raum zur Construction erfordert.

Aufgabe 37.

Einen Bogen in 2, 4, 8, 16 ꝛc. gleiche Theile zu theilen.



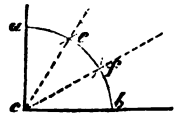
Aufl. 1. Mit einem beliebigen Radius mache man aus a und b die Kreuzbogen bei c und ziehe cc; wo dieſe den Bogen ab in m ſchneidet, iſt der Mittelpunct von ab. Auf dieſelbe Weiſe verfahre man mit den Puncten a und m, ſo erhält man m' als Mittelpunct von am oder am'=$\frac{1}{4}$ab. Eben ſo gelangt man zu $\frac{1}{8}$ab, $\frac{1}{16}$ab ꝛc.



Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a und b beſchreibe man mit dem Radius des gegebenen Bogens die ihm gleichen cx=cy=ab, aus x und y mit xa=yb die Bogen ad und bd, und ſchneide mit cd aus x oder y in m, ſo iſt am=mb. Auf gleiche Weiſe kann man wieder am und bm halbiren u. ſ. w.

Aufgabe 38.

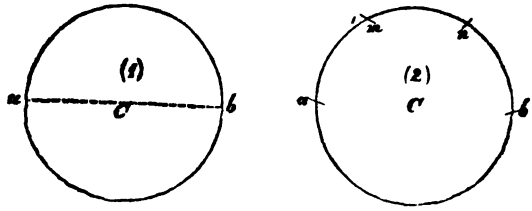
Einen rechten Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Mit einem beliebigen Radius beſchreibe man aus c den Bogen ab, ſchneide mit derſelben Oeffnung des Zirkels aus b in e, aus a in f, ſo iſt ae=ef=fb.

Aufgabe 39.

Einen Kreis in 2 gleiche Theile zu theilen.

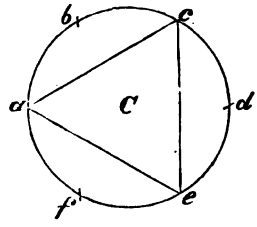


Aufl. 1. Man ziehe durch das Centrum C einen beliebigen Durchmeſſer, ſo theilt dieſer die Peripherie des Kreiſes in a und b in zwei gleiche Theile.

Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Man nehme den Radius des gegebenen Kreiſes in den Zirkel, ſetze beliebig in a ein, ſchneide aus a in m, aus m in n und aus n in b, ſo liegen a, C, b in gerader Linie.

Aufgabe 40.

Einen Kreis in 3 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein gleichſeitiges Dreieck zu conſtruiren.

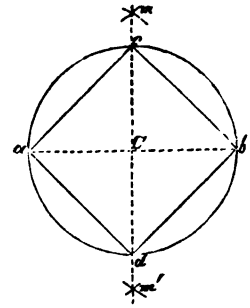


Aufl. Nur mit dem Zirkel. Von einem beliebigen Puncte a trage man den Radius des Kreiſes aC nach der einen Seite bis c zweimal, nach der anderen Seite bis e ebenfalls zweimal auf, ſo iſt ac=ce=ea. Verbindet man nun dieſe Puncte durch die Geraden, ſo hat man das gleichſeitige Dreieck. Sicherer iſt es jedoch, den Ra-

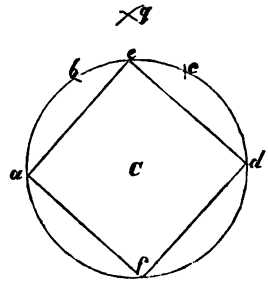
dius aC sechsmal im Kreise herum zu tragen, um zu sehen, ob man von f genau wieder nuf a zurückkömmt, wozu erforderlich ist, die Zirkelspitze genau in die Peripherie des Kreises einzusetzen.

Aufgabe 41.

Einen Kreis in 4 gleiche Theile zu theilen, oder in demselben ein Quadrat zu construiren.



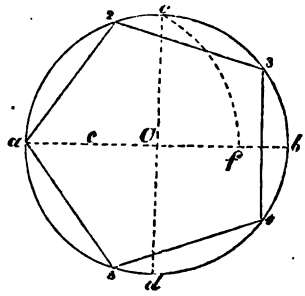
Aufl. 1. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser ab, aus a und b beliebig die Kreuzbogen bei m und m' und ziehe mm', so ergeben sich dadurch die Puncte c und d, und a, c, b, d verbunden, giebt das verlangte Quadrat.



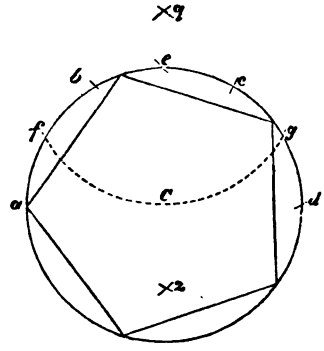
Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Mit dem Radius aC schneide man aus a in b, aus b in c, aus c in d; dann aus a und d mit ac=bd in q geschnitten, so ist Cq die Seite des Quadrates; schneidet man also aus a mit Cq in e und f, so ist der Kreis durch a, e, d, f in 4 gleiche Theile getheilt.

Aufgabe 42.

Einen Kreis in 5 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein regulaires Fünfeck zu conſtruiren.



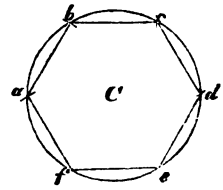
Aufl. Man ziehe zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer ab, cd, theile den Radius aC bei e in die Hälfte, und ſchneide aus e mit ec in f, ſo iſt fc die Seite des Fünfecks.



Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage man den Radius aC dreimal bis d auf, und ſchneide aus a und d mit ac in q, mit Cq aus a in e, und aus e mit eC in f und g, endlich aus f und g mit Cq in z, ſo iſt az die Seite des Fünfecks.

Aufgabe 43.

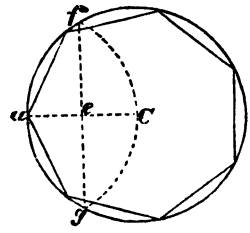
Einen Kreis in 6 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein regulaires Sechseck zu konſtruiren.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Man nehme den Radius aC in den Zirkel, so läßt sich dieser 6 mal im Kreise herumtragen.

Aufgabe 44.

Einen Kreis näherungsweise in 7 gleiche Theile zu theilen, oder in demselben ein regulaires Siebeneck zu construiren.



Aufl. Man ziehe den Radius aC und schneide aus a mit aC in f und g, ziehe fg, so ist fe näherungsweise die Seite des Siebenecks.

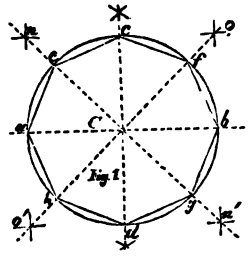
Für den Radius = 1 ist die Seite des Siebenecks =0.8678

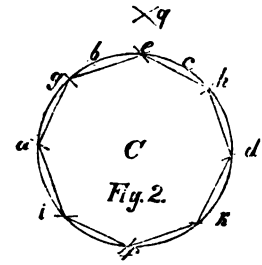
Die Construction giebt aber fe=0.8660

also um 0.0018 zu klein.

Aufgabe 45.

Einen Kreis in 8 gleiche Theile zu theilen, oder in demselben ein regulaires Achteck zu construiren.



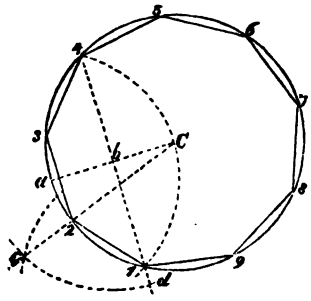


Aufl. 1. Fig. 1. Man ziehe zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer, ab, cd, und theile mit Hülfe der Kreuzbögen bei n, o, n', o' die Bogen ac, cb, bd, da nochmals in die Hälfte.

Aufl. 2. Fig. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage den Radius aC dreimal bis d auf, aus a und d mit ac in q, mit Cq aus a in e und f geſchnitten, ferner mit dem Radius aC aus q in g und h, endlich mit Cq aus g in i, aus h in k geſchnitten, ſo iſt der Kreis durch a, g, e, h, d, k, f, i in 8 gleiche Theile getheilt worden.

Aufgabe 46.

Einen Kreis näherungsweiſe in 9 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein regulaires Neuneck zu conſtruiren.

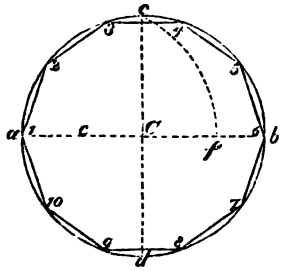


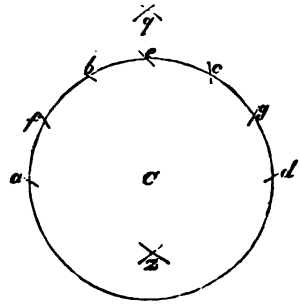
Aufl. Aus einem beliebigen Puncte a ſchneide man mit dem Radius aC in 1 und 4, aus b in d, und aus b und d in e und ziehe eC, ſo läßt ſich 1.2 näherungsweiſe im Kreiſe neunmal herumtragen.

Für den Radius =1 iſt die Seite des Neunecks =0.6840
Die Conſtruction giebt aber die Seite 1.2=0.6823
alſo um 0.0017 zu klein.

Aufgabe 47.

Einen Kreis in 10 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein reguläres Zehneck zu conſtruiren.



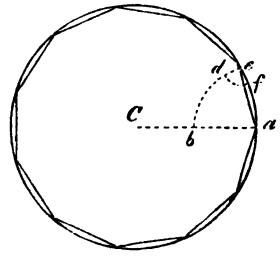


Aufl. 1. Man ziehe zwei auf einander ſenkrechte Durchmeſſer, ab, cd, theile den Radius aC bei e in die Hälfte, und ſchneide aus e mit ec in f, ſo iſt fC die Seite des Zehnecks. Vgl. hier Aufg. 42.

Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage man den Radius aC dreimal bis d auf und ſchneide aus a und d mit ac in q, mit Cq aus a in e und aus e mit eC in f und g, endlich aus f und g mit Cq in z, ſo iſt Cz die Seite des Zehnecks. Vgl. Aufg. 42.

Aufgabe 48.

Einen Kreis näherungsweiſe in 11 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein regulaires Elfeck zu conſtruiren.



Aufl. Man ziehe einen Radius aC, halbire ihn in b und mache aus a mit ab den Bogen bde, ſchneide ihn aus b in d und aus e mit ed in f, ſo iſt bf ſehr nahe gleich der Seite des Elfecks.

Für den Radius =1 iſt die Seite des Elfecks =0.5635

Die Conſtruction giebt aber die Länge bf =0.5637

alſo um 0.0002 zu groß.

Aufgabe 49.

Einen Kreis in 12 gleiche Theile zu theilen, oder in demſelben ein regulaires Zwölfeck zu conſtruiren.

Fig. 1.

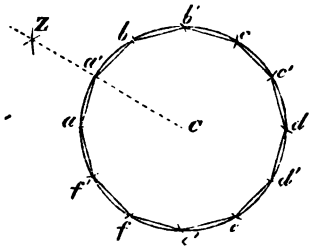
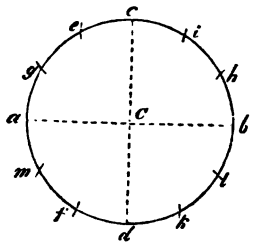
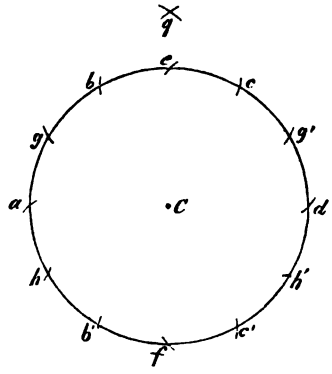


Fig. 2.



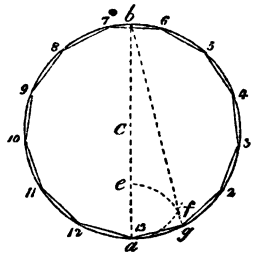
Aufl. Man trage vom Puncte a Fig. 1. den Radius aC ſechsmal im Kreiſe herum, mache aus a und b die Kreuzbogen bei z, ziehe zC und trage von a' nochmals den Radius aC ſechsmal herum. Oder man ziehe Fig. 2. cd ſenkrecht auf ab, ſchneide mit dem Radius aC aus a in e und f, aus c in g und h, aus b in i und k, und aus d in l und m und verbinde die Schnittpuncte zum Zwölfeck.



Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Man trage den Radius aC von a dreimal bis d auf, aus a und d mit ac in q, aus a mit Cq in e und f geſchnitten, dann mit aC aus a in b', aus e in g und g', aus d in c', aus f in h und h' geſchnitten, ſo iſt dadurch der Kreis in 12 gleiche Theile getheilt.

Aufgabe 50.

Einen Kreis näherungsweise in 13 gleiche Theile zu theilen, oder in demselben ein regulaires Dreizehneck zu construiren.



Aufl. Man ziehe einen Durchmesser ab, halbire aC in e und schneide mit ae aus a und e in f, ziehe bf bis g, so ist ag näherungsweise die Seite des Dreizehnecks.

Für den Radius =1 ist die Seite des Dreizehnecks =0.4786

Die Construction giebt für die Länge ag =0.4803

also um 0.0017 zu groß.

Aufgabe 51.

Einen Kreis in 15 gleiche Theile zu theilen, oder in demselben ein regulaires Funfzehneck zu construiren.

Fig. 1.

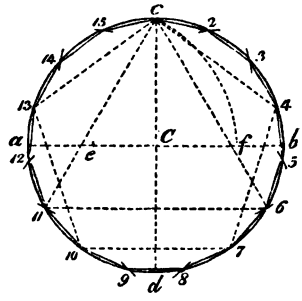
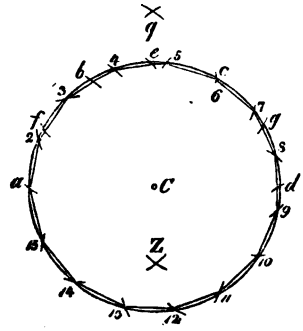


Fig. 2.



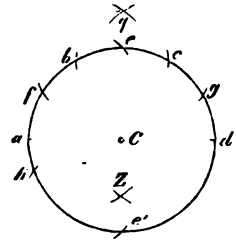
Aufl. 1. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser Fig. 1. ab, cd, theile den Radius aC bei e in die Hälfte und schneide aus e mit ec in f, mit fc schneide man aus c in 4, aus 4 in 7, aus 7 in 10, aus 10 in 13. Dann trage man den Radius von c

zweimal bis 6 auf, ſchneide aus c mit c6 in 11, aus 4 in 9 und 14, aus 7 in 2 und 12, aus 10 in 5 und 15, aus 13 in 3 und 8 Vgl. Aufg. 42. Aufl. 1.

Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage den Radius aC dreimal bis d auf und ſchneide aus a und d mit ac in q, mit Cq aus a in e, aus e mit eC in f und g, und aus f und g mit Cq in z, dann aus a mit az in 4, aus 4 in 7, aus 7 in 10, aus 10 in 13, ferner aus a mit ac in 11, aus 4 in 9 und 14 u. ſ. w. wie in Aufl. 1. Vgl. Aufg. 42. Aufl. 2.

Aufgabe 52.

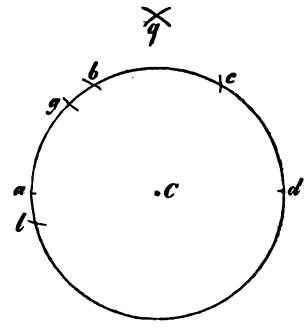
Einen Kreis in 20 gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Man trage von a den Radius aC dreimal bis d auf, aus a und d ſchneide mit ac in q, aus a mit Cq in e und e', aus e mit eC in f und g, und aus f und g ſchneide mit Cq in z, dann aus e' mit az in k, oder aus z mit aC in k, oder aus e mit ez in k, ſo iſt ak der zwanzigſte Theil des Kreiſes.

Aufgabe 53.

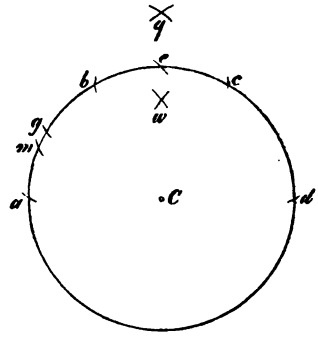
Einen Kreis in 24 gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage den Radius aC dreimal bis d auf und ſchneide mit ac aus a und d in q, mit aC ſchneide man aus q in g, aus g in l, ſo iſt al der vier und zwanzigſte Theil des Kreiſes.

Aufgabe 54.

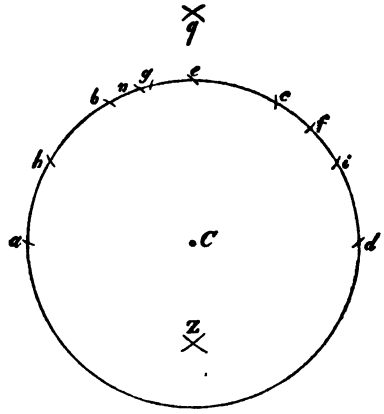
Einen Kreis in 48 gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Aus a trage den Radius aC dreimal bis d auf und ſchneide mit ac aus a und d in q, mit Cq aus a in e, aus e mit aC in g. Aus a und d ſchneide man mit qg in w, und aus w mit aC in m, ſo iſt gm der acht und vierzigſte Theil des Kreiſes.

Aufgabe 55.

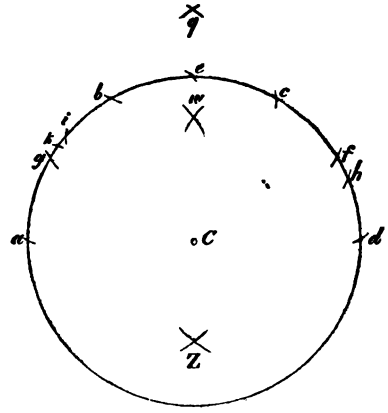
Einen Kreis in 120 gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Man trage
1) den Radius aC dreimal ab, bc, cd bis d auf,
2) ſchneide aus a und d mit ac in q,
3) — — a mit Cq in e,
4) — — q mit aC in f, aus f in g,
5) — — e mit aC in h und i,
6) — — h und i mit Cq in z,
7) — — a mit az in n, ſo iſt gn der hundert und zwanzigſte Theil des Kreiſes.

Aufgabe 56.

Einen Kreis in 240 gleiche Theile zu theilen.

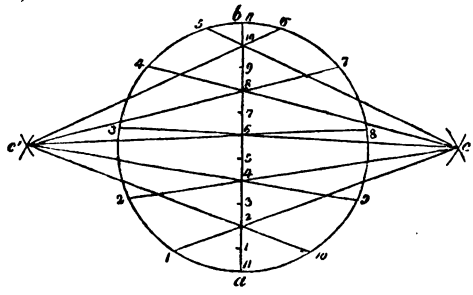


Aufl. Nur mit dem Zirkel. Man trage

1) den Radius aC dreimal ab, bc, cd bis d auf,
2) ſchneide aus a und d mit ac in q,
3) — — a mit Cq in e.
4) — — e mit aC in f und g,
5) — — a und d mit qg in w,
6) — — w mit aC in h,
7) — — h mit ac in i,
8) — — f und g mit Cq in z,
9) — — a mit Cz in k, ſo iſt ik der zweihundert und vierzigſte Theil des Kreiſes.

Aufgabe 57.

Einen Kreis näherungsweiſe in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.



Aufl. Man ziehe einen Durchmesser ab und schneide aus a und b mit ab in c und c'; theile dann ab in eben so viele gleiche Theile, als der Kreis getheilt werden soll und ziehe durch c und c' und durch die geraden Theilpuncte von ab Gerade, bis sie den Kreis auf der entgegengesetzten Seite treffen, so wird durch sie der Kreis näherungsweise in eben so viele gleiche Theile getheilt. In der Figur ist z. B. der Durchmesser ab in 11 gleiche Theile getheilt, und durch c und c' und durch die Theilpuncte 2, 4, 6 ꝛc. die Geraden gezogen worden, wodurch man im Kreise die Puncte 1, 2, 3 ꝛc. erhalten hat. Mit welcher Genauigkeit man durch diese Construction die erste Seite a1 für verschiedene Vielecke erhält, zeigt nachstehende Tafel, in welcher die erste Spalte die Anzahl der Seiten des Vielecks angiebt, die zweite die wahre Länge einer derselben, wenn man den Radius des Kreises =1 annimmt, die dritte den Werth, welchen die Construction giebt, und die vierte den Unterschied beider.

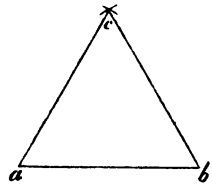
Für den Radius =1 ist die Seite des		Die Construction giebt	Unterschied	Für den Radius =1 ist die Seite des		Die Construction giebt	Unterschied
5 Ecks	1.1756	1.1749	—0.0007	18 Ecks	0.3473	0.3580	+0.0107
6 —	1.0000	1.0000	0.0000	19 —	0.3292	0.3400	+0.0108
7 —	0.8678	0.8692	+0.0014	20 —	0.3129	0.3238	+0.0109
8 —	0.7654	0.7684	+0.0030	21 —	0.2981	0.3091	+0.0110
9 —	0.6840	0.6886	+0.0046	22 —	0.2846	0.2956	+0.0110
10 —	0 6180	0.6240	+0.0060	23 —	0.2723	0.2834	+0.0111
11 —	0.5635	0.5705	+0.0070	24 —	0.2611	0.2721	+0.0110
12 —	0.5176	0.5256	+0.0080	25 —	0.2507	0.2616	+0.0109
13 —	0.4786	0.4874	+0.0088	26 —	0.2411	0.2520	+0.0109
14 —	0.4450	0.4544	+0.0094	27 —	0.2322	0.2430	+0.0108
15 —	0.4458	0.4256	+0.0098	28 —	0.2239	0.2347	+0.0108
16 —	0.3902	0.4004	+0.0102	29 —	0.2162	0.2269	+0.0107
17 —	0.3675	0.3780	+0.0105	30 —	0.2091	0.2196	+0.0105

Hieraus sieht man, daß die Construction die Seite a1 des gesuchten Vielecks stets zu groß giebt, und der Fehler wächst, je größer die Anzahl der Seiten des Vielecks wird. Man würde also, wollte man die Seite a1 allein im Kreise herumtragen, nicht wieder in den Punct a zurückkommen, sondern über denselben hinaus, und z. B. beim 20Eck um $\frac{3}{10}$, beim 30Eck schon um $\frac{3}{10}$ des Radius. Durch das Ziehen der Linien von c und c' aus werden aber diese Fehler gleichmäßig vertheilt, indem die Seite 1.2 um ein Geringes kleiner

iſt als die Seite a1, die Seite 2.3 wieder um ein Geringes kleiner als 1.2 u. ſ. w., bis zu der Mitte des Halbkreiſes, nachher aber um eben ſo viel wieder wachſen. Dieſe Methode den Kreis zu theilen iſt bekannt unter dem Namen der Renaldi'ſchen, weil Renaldi ſie in ſeinem Werke De Resolutione et Compositione mathematica. Patavii 1668, pag. 367 zuerſt gegeben hat.

Aufgabe 58.

Ueber einer gegebenen Seite ab ein gleichſeitiges Dreieck zu conſtruiren.



Aufl. Aus a und b ſchneide mit ab in c und ziehe ac und bc.

Aufgabe 59.

Ueber einer gegebenen Seite ab ein Quadrat zu conſtruiren.

Fig. 1.

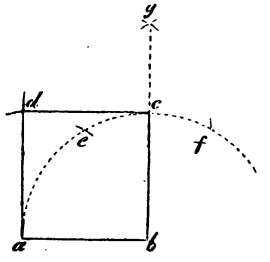
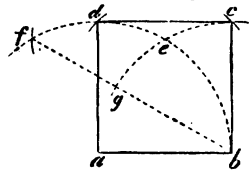
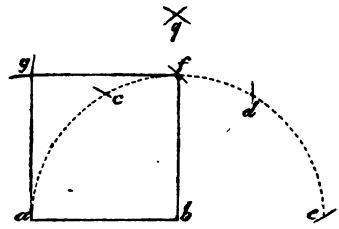


Fig. 2.



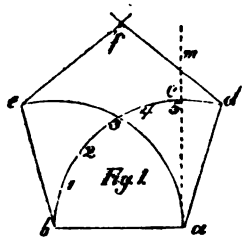
Aufl. 1. Mit ab beſchreibe aus b einen Bogen, Fig. 1., ſchneide aus a in e, aus e in f, und aus e und f in g, ziehe bg bis c und ſchneide mit ab aus a und c in d. Oder Fig. 2. Mit ab beſchreibe aus a und b Bogen, ſchneide aus a und e in f und ziehe bf, die in g ſchneidet, und mache ec=ed=eg.

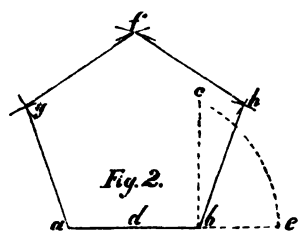


Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus b beſchreibe man mit ab einen Bogen, trage ab dreimal ac, cd, de bis e auf und ſchneide mit ad aus a und e in q, mit bq aus a in f, und aus a und f mit ab in g.

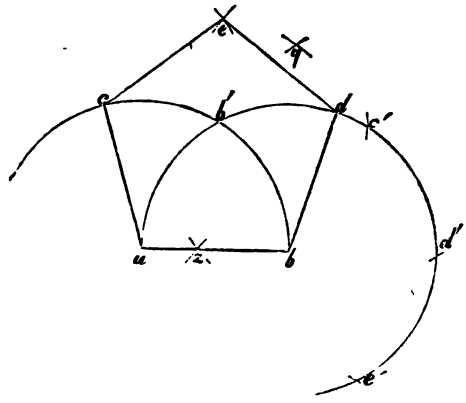
Aufgabe 60.

Ueber einer gegebenen Seite ab ein regulaires Fünfeck zu conſtruiren.





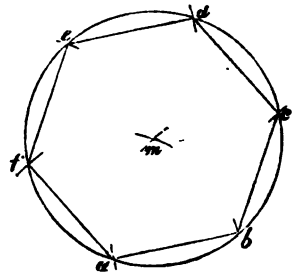
Aufl. 1. Man errichte, Fig. 1., in a ein Perpendikel am, und mache aus a den Bogen bcd, theile den Quadranten bc in 5 gleiche Theile und mache cd=$\frac{1}{5}$bc; aus b mit ab beſchreibe einen Bogen, und mache ae=bd, dann ſchneide man aus e und d mit ab in f. Oder man errichte in b, Fig. 2., ein Perpendikel bc=ab, halbire ab in d und ſchneide aus d mit dc die Verlängerung von ab in e; aus a und b ſchneide man mit ae in f, dann mit ab aus a und f in g, aus b und f in h.



Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus a und b beſchreibe man mit ab zwei Bogen, trage von a aus den Radius viermal ab', b'c', c'd', d'e' bis e' auf, aus a und d' ſchneide mit ac' in q, aus c' und e' mit bq in z, trage bz von a dreimal auf bis d, von b dreimal auf bis c, und ſchneide aus c und d mit ab in e. Oder man ſchneide aus a und b mit d'z in e aus e, mit ab in c und d.

Aufgabe 61.

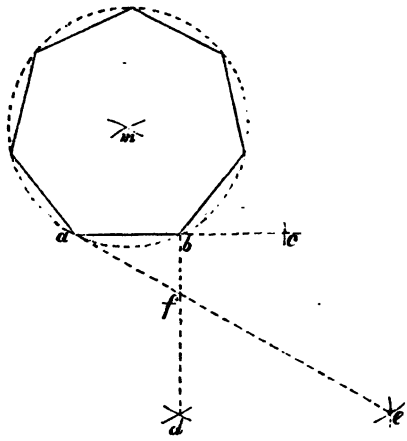
Ueber einer gegebenen Seite ab ein regulaires Sechseck zu conſtruiren.



Aufl. Nur mit dem Zirkel. Aus a und b ſchneide man mit ab in m, und aus m mit ma einen Kreis, ſo läßt ſich in dieſem die Seite ab ſechsmal herumtragen.

Aufgabe 62.

Ueber einer gegebenen Seite ab näherungsweiſe ein regulaires Siebeneck zu conſtruiren.



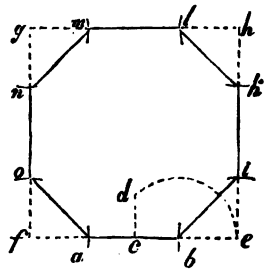
Aufl. Man verlängere ab und mache bc=ab, aus a und c ſchneide mit ac in d, aus c und d in e, ziehe bd und ae, die ſich in f ſchneiden, ſo iſt af näherungsweiſe der Radius eines Kreiſes, in dem ſich ab ſiebenmal herumtragen läßt. Für die Seite =1 iſt der Radius des umſchriebenen Kreiſes =1.1524

Die Conſtruction giebt af=1.1547

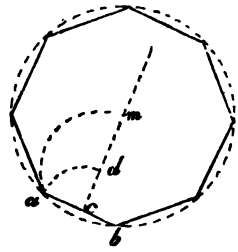
alſo um 0.0023 zu groß.

Aufgabe 63.

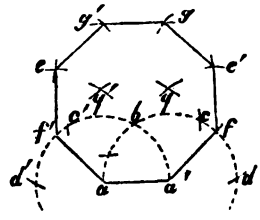
Ueber einer gegebenen Seite ab ein regulaires Achteck zu conſtruiren.



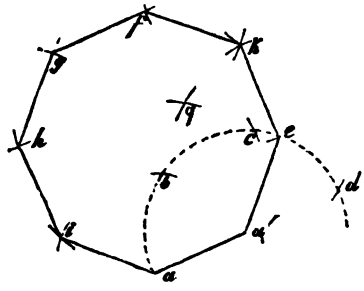
Aufl. 1. Man halbire ab in c, errichte in c ein Perpendikel cd=cb, ſchneide aus b und a mit bd in e und f, conſtruire über ef das Quadrat efgh, und ſchneide aus den Endpuncten von den Seiten Stücke =eb ab.



Aufl. 2. Man errichte in der Mitte von ab in c ein Perpendikel, ſchneide aus c mit ca in d, aus d mit da in m, und beſchreibe aus m mit ma einen Kreis, ſo läßt ſich in dieſem die Seite achtmal herumtragen.

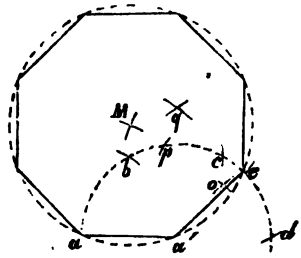


Aufl. 3. Nur mit dem Zirkel. Aus a und a' beſchreibe man mit aa' einen Bogen, trage aa' von a dreimal bis d, von a' dreimal bis d' auf, mit ac ſchneide aus a und d in q, aus a' und d' in q', aus q den Bogen bei e, aus q' den Bogen bei e', dann aus q mit aa' in f geſchnitten und den Bogen bei g gemacht, aus q' in f' geſchnitten und den Bogen bei g' gemacht, endlich aus f' in e, aus e in g', aus g' in g und aus g in e' geſchnitten.



Aufl. 4. Nur mit dem Zirkel. Aus a' beſchreibe einen Bo-

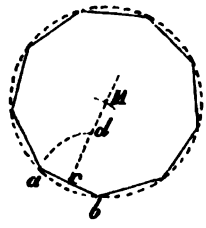
gen, trage den Radius aa' dreimal bis d auf, und ſchneide aus a und d mit ac in q, aus q mit aa' ſchneide in e und mache einen Bogen bei f, mit qa' einen Bogen bei g, mit qa einen Bogen bei h, und mit ae einen Bogen bei i, dann ſchneide mit aa' aus a in i, aus i in h, aus h in g, aus g in f und aus e und f in k.



Aufl. 5. Nur mit dem Zirkel. Aus a' mit aa' mache man einen Bogen, trage aa' dreimal bis d auf und ſchneide aus a und d mit ac in q, aus q mit aa' in e, aus a' und d mit de in o und aus o in p, endlich aus a und e mit ap in M, ſo iſt M der Mittelpunct des Kreiſes, in welchem ſich aa' achtmal herumtragen läßt.

Aufgabe 64.

Ueber einer gegebenen Seite ab näherungsweiſe ein regulaires Neuneck zu conſtruiren.



Aufl. Man halbire ab in c und errichte ein Perpendikel, ſchneide aus b mit ab in d, und mache dM=ac, ſo iſt Ma der Radius des Kreiſes, in welchen ſich ab neunmal herumtragen läßt. Für die Seite =1 iſt der Radius des umſchriebenen Kreiſes beim Neuneck

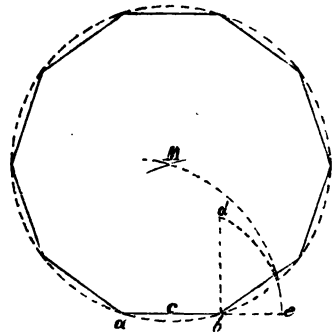
$$= 1.4620$$

Die Conſtruction giebt Ma $= 1.4547$

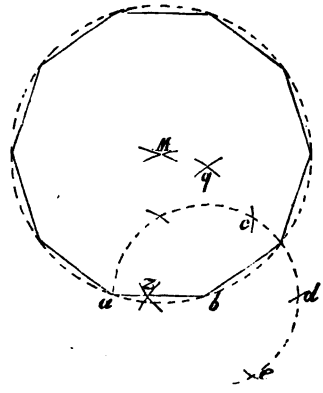
alſo um 0.0073 zu klein.

Aufgabe 65.

Ueber einer gegebenen Seite ab ein regulaires Zehneck zu construiren.



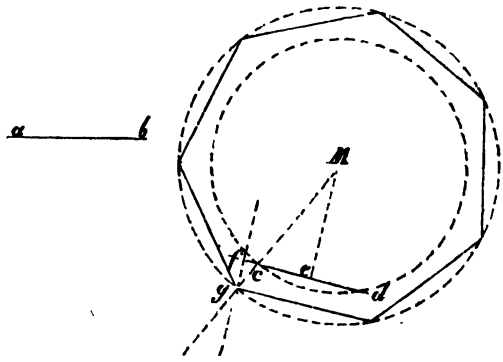
Aufl. 1. Man halbire ab in c, errichte in b ein Perpendikel bd=ab und schneide aus c mit cd in e, aus a und b mit ae in M, so ist M der Mittelpunct des umschriebenen Kreises.



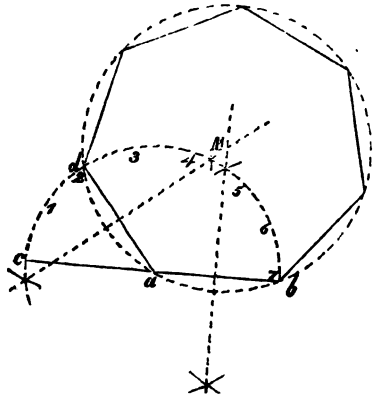
Aufl. 2. Nur mit dem Zirkel. Aus b beschreibe einen Bogen und trage ab viermal bis e auf, aus a und d schneide mit ac in q, aus c und e mit bq in z, und aus a und b mit dz in M, so ist M der Mittelpunct des umschriebenen Kreises.

Aufgabe 66.

Ueber einer gegebenen Seite ab ein beliebig vielseitiges regulaires Vieleck, z. B. ein Siebeneck, zu construiren.



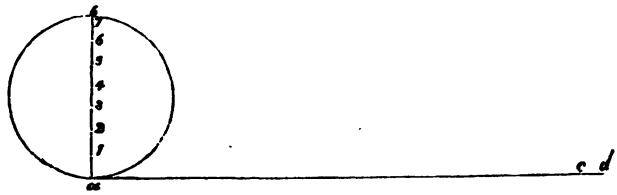
Aufl. 1. Man conſtruire in einem beliebigen Kreiſe die Seite cd eines regulairen Vielecks von eben ſo vielen Seiten, als das verlangte, halbire dieſelbe in e und mache ef der Hälfte der gegebenen Seite ab gleich, errichte in f eine Senkrechte auf cd und ziehe Mc bis ſie die Senkrechte in g ſchneidet, ſo iſt Mg der Radius des Kreiſes, in welchem ſich ab ſo oft als verlangt wurde herumtragen läßt.



Aufl. 2. Man verlängere ab nach c, beſchreibe aus a mit ab einen Halbkreis, und theile ihn in eben ſo viele gleiche Theile, als das geſuchte Vieleck Seiten haben ſoll, ziehe von a ſtets nach dem zweiten Theilpuncte von c aus die Linie ad, und beſchreibe durch a, b und d einen Kreis, ſo läßt ſich in dieſem die gegebene Seite ab ſo oft als verlangt wurde, herumtragen.

Aufgabe 67.

Eine Linie näherungsweise gleich dem Umfange eines gegebenen Kreises zu construiren.

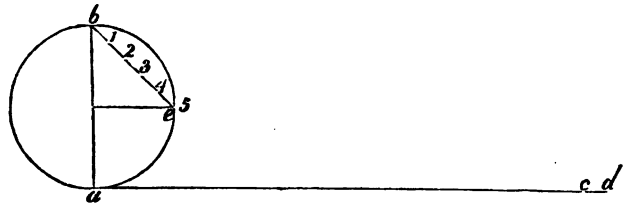


Aufl. 1. Man theile den Durchmesser in 7 gleiche Theile, trage von a den Durchmesser ab dreimal bis c auf und setze noch cd=$\frac{1}{7}$ab hinzu. Für den Durchmesser =1 ist der Umfang

=3.14159

Die Construction giebt die Länge ad=3.14287

also um 0.00128 zu groß.

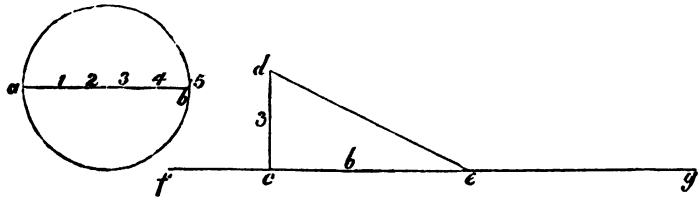


Aufl. 2. Man theile die Seite des Quadrats im Kreise in 5 gleiche Theile, trage den Durchmesser ab dreimal bis c auf und setze noch cd=$\frac{1}{5}$be hinzu. Für den Durchmesser =1 ist der Umfang

=3.14159

Die Construction giebt die Länge ad=3.14125

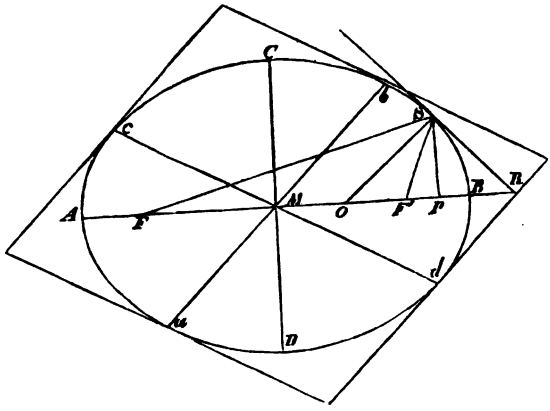
also um 0.00034 zu klein.



Aufl. 3. Man theile den Durchmeſſer ab in 5 gleiche Theile, conſtruire ein rechtwinkliges Dreieck dce, deſſen eine Kathete cd gleich 3 ſolcher Theile, die andere ce gleich 6 ſolcher Theile iſt, ſo iſt der Umfang des Dreiecks dce=fg=3.14164. Für den Durchmeſſer =1 iſt aber der Umfang des Kreiſes =3.14159
alſo um =0.00005 zu groß.

Von der Ellipſe.

Bezeichnungen.



Man nennt: M den Mittelpunct der Ellipſe.
AB die große, CD die kleine Axe.
A, B, C und D die vier Scheitelpuncte.
F und F' die Brennpuncte (Focus).
FS oder F'S ein Leitſtrahl oder radius vector.
FS und F'S zuſammen radii vectores.
SR die Tangente.
PR die Subtangente.
SO die Normale.
PO die Subnormale.

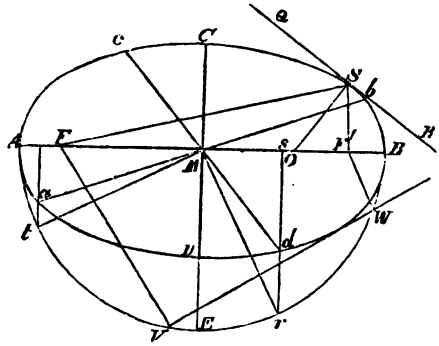
MP die Abſciſſe.

SP die Ordinate.

MF=MF' die Excentricität.

ab, cd conjugirte Durchmeſſer, wenn die Tangente in **c** und **d** parallel **ab**, und die Tangente in **a** und **b** parallel **cd** iſt.

Einige der wichtigſten Eigenſchaften der Ellipſe.



I. Beſchreibt man über einer Axe, etwa über **AB**, einen Halbkreis und zieht durch einen Punct **d** der Ellipſe eine Senkrechte **rs**, ſo verhält ſich **sd:sr=MD:ME=MD:MA**, d. h.:
eine Ordinate der Ellipſe verhält ſich zur zugehörigen Ordinate des Kreiſes, wie die kleine Axe zur großen.

II. Die Summe der radii vectores eines Punctes S der Ellipſe iſt der großen Axe gleich, d. h. es iſt immer

$$FS+F'S=AB.$$

III. Die zu einem Puncte S gehenden radii vectores machen mit der an dieſem Puncte gezogenen Tangente **QR** und mit der Normale **SO** gleiche Winkel, d. h. es iſt

$$\angle FSQ=\angle F'SR$$

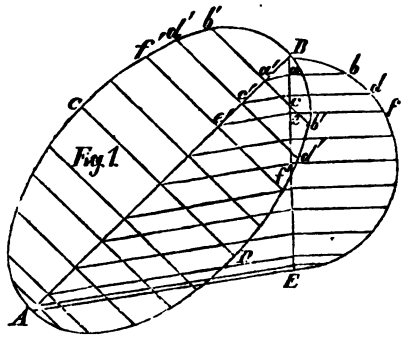
und $$\angle FSO=\angle F'SO.$$

IV. Die zu den conjugirten Durchmeſſern **ab, cd** zugehörigen Radien des Kreiſes **Mt, Mr** ſind ſenkrecht auf einander.

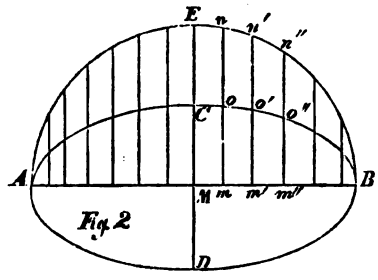
V. Wenn man aus den beiden Brennpuncten **F** und **F'** zwei Senkrechte **FV** und **F'W** auf einer Tangente **VW** der Ellipſe zieht, ſo liegen die Durchſchnittspuncte **V, W** in dem über der großen Axe beſchriebenen Kreiſe.

Aufgabe 68.

Eine Ellipse zu construiren, wenn die große Axe AB und die kleine Axe CD gegeben sind.



Aufl. 1. Man lege an der einen Axe, etwa AB, beliebig die andere BE=CD an, beschreibe über BE einen Halbkreis und ziehe beliebige auf BE senkrechte halbe Sehnen ab, cd, ef; durch die Puncte a, c, e ziehe man Parallele mit AE, die AB in a', c', e' schneiden, und durch diese Schnittpuncte Senkrechte auf AB, mache dann a'b'=ab, c'd'=cd, e'f'=ef ꝛc., so sind b', d', f' Puncte der Ellipse.



Aufl. 2. Man beschreibe über AB einen Halbkreis und ziehe beliebige auf AB senkrechte halbe Sehnen mn, m'n', m''n'' ꝛc., theile diese in den Puncten o, o', o''... so, daß mn:mo=m'n':m'o'=m''n'':m''o''=AB:CD=AM:MC, so sind o, o', o'' Puncte Ellipse.

Diese Methode ist dann nur leicht anwendbar, wenn sich AB zu CD verhält wie 2:1, oder 4:1, oder 8:1; am leichtesten, wenn CD die Hälfte von AB ist, wo dann die Puncte o, o', o'' die Mittelpuncte von mn, m'n', m''n''... sind.

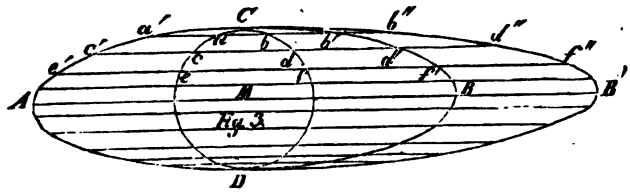


Fig. 3.

Aufl. 3. Verhält ſich AB:CD wie 3:1, oder wie 5:1, oder wie 7:1, ſo kann man die Ellipſe leicht ſo conſtruiren: Man beſchreibe mit der kleinen Axe CD als Durchmeſſer einen Kreis, ziehe beliebige parallele Sehnen ab, cd, ef... und mache aa'=ab=bb', c'c=cd=dd' ꝛc., ſo ſind a', b', c', d' ꝛc. Puncte der Ellipſe. Oder man mache bb''=2ab, dd''=2cd ꝛc., ſo ſind b'', d'', f'' ꝛc. wieder Puncte einer zweiten Ellipſe, deren Axen ſich in der erſten wie 3:1, in der zweiten wie 5:1 zu einander verhalten.

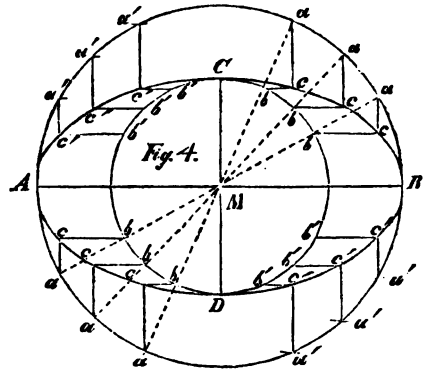


Fig. 4.

Aufl. 4. Man beſchreibe aus M mit den beiden halben Axen MA und MC zwei Kreiſe, und ziehe einen beliebigen Durchmeſſer aa im großen Kreiſe, der den kleinen in b, b ſchneidet. Durch Parallele mit AB erhält man dann die Puncte a' und b'. Durch die Puncte a, a' im großen Kreiſe ziehe man Parallele mit der kleinen Axe, durch die Puncte b, b' im kleinen Kreiſe Parallele mit der großen Axe, ſo geben ihre Schnittpuncte c, c' Puncte zur verlangten Ellipſe.

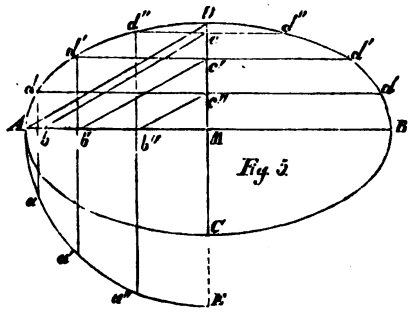


Fig. 5.

Aufl. 5. Aus M beſchreibe man mit MA den Viertelkreis AE und theile ihn in den Puncten a, a′, a″... in beliebig viele gleiche Theile, ziehe durch die Puncte a, a′, a″... die auf AM Senkrechten ad, a′d′, a″d″ und durch die Schnittpuncte b, b′, b″ Paralle mit AD, wodurch man zu den Puncten c, c′, c″... gelangt; durch dieſe ziehe man Parallele mit AB, ſo erhält man in d, d′, d″... Puncte zur verlangten Ellipſe. Die Puncte in den übrigen Vierteln der Ellipſe ergeben ſich dann leicht, wenn man cd″, c′d′... und bd, b′d′... auf die andere Seite überträgt.

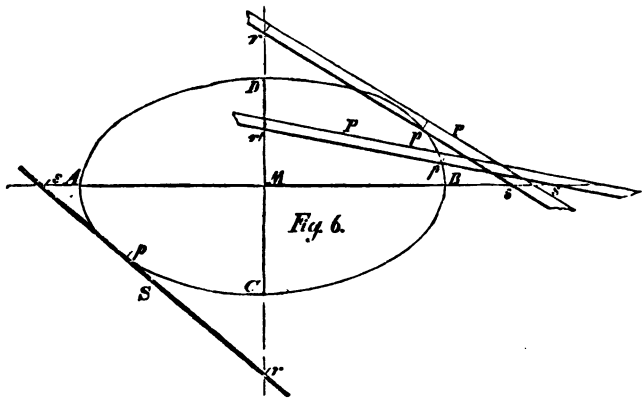


Fig. 6.

Aufl. 6. Man nehme einen geraden Streifen Papier P, oder einen Stock, Latte, Stange S und markire darauf einen beliebigen Punct p; von p trage man ps gleich der halben kleinen Axe MD, nach der anderen Seite pr gleich der halben großen Axe MA auf, und ver-

ſchiebe nun den Streifen Papier oder den Stock ſo, daß der Punct s ſtets in der großen, der Punct r ſtets in der kleinen Axe zu liegen kömmt, und gebe bei jeder Lage den Punct p auf der Zeichnung an, ſo erhält man dadurch ſo viele Puncte zur Ellipſe, als man haben will.

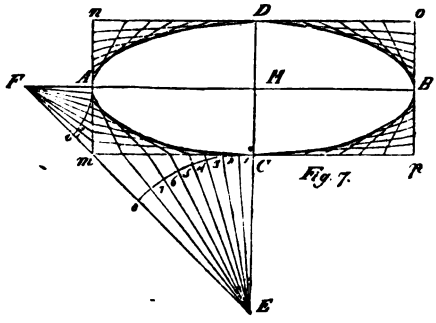
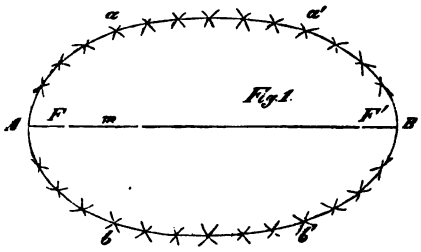


Fig. 7.

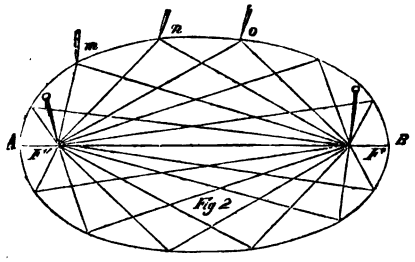
Aufl. 7. Conſtruction der Ellipſe durch Tangenten. Man conſtruire mit den beiden Axen AB, CD das Rechteck mnop, mache CE=Cm=AM und AF=Am=MD und ziehe Em F, beſchreibe aus F und E die beiden Bogen bis an EF, und theile beide in beliebig (aber eben ſo viel) gleiche Theile, ziehe dann durch die Theilpuncte und E und F Linien bis an Am und Cm, und verbinde die Schnittpuncte 1 mit 1, 2 mit 2 ꝛc., wie die Figur zeigt, ſo entſteht durch die nahe auf einander folgenden Tangenten der vierte Theil der Ellipſe von ſelbſt. Die übrigen Viertel der Ellipſe entſtehen eben ſo, wenn man von n, o, p aus die Maße der Reihefolge nach, von m an gerechnet, auf die Seiten des Rechtecks aufträgt.

Aufgabe 69.

Eine Ellipſe zu conſtruiren, wenn die große Axe AB und in ihr die beiden Brennpuncte F und F' gegeben ſind.



Aufl. 1. Man nehme in AB einen beliebigen Punct m an, mache mit Am aus F und F' die Bogen bei a, b und a', b' und schneide mit Bm aus F in a' und b', aus F' in a und b. Auf diese Weise kann man so viele Puncte zur Ellipse erhalten, als man will.



Aufl. 2. Man befestige in den beiden Brennpuncten F und F' zwei Stifte, lege um dieselben eine Schnur von der Länge der großen Axe AB, vermehrt um die Entfernung beider Brennpuncte FF', nehme alsdann einen Zeichenstift und spanne mit demselben die Schnur straff an, so erhält man durch Fortbewegung dieses Zeichenstiftes von m nach n, nach o ꝛc. die verlangte Ellipse.

Obgleich diese Methode wegen ihrer leichten Ausführung stets in der Praxis, z. B. von Gärtnern, Steinbrückern und mehren anderen angewandt wird, sobald sehr große Ellipsen auf Ebenen construirt werden sollen, wobei die Genauigkeit, welche man in der Zeichnung auf dem Papiere wünscht, nicht gefordert wird, so läßt sie sich doch im Kleinen nicht mit Genauigkeit auf dem Papiere ausführen, da die Elasticität des Fadens stets größere und kleinere Fehler erzeugen wird.

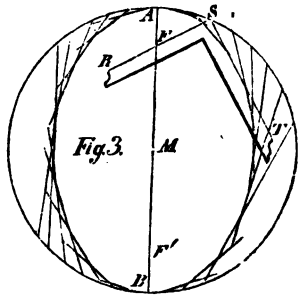


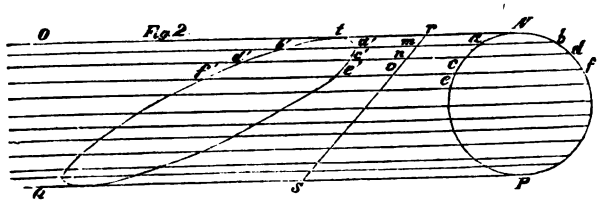
Fig. 3.

Aufl. 3. Construction der Ellipse durch Tangenten. Man beschreibe mit der großen Axe **AB** als Durchmesser einen Kreis und lege ein rechtwinkliges Lineal **RST** so an, daß der eine Schenkel **RS** durch einen Brennpunct geht, und die Spitze **S** in die Peripherie des Kreises zu liegen kömmt, und ziehe am andern Schenkel die Linie **ST**, so ist diese eine Tangente der Ellipse. Auf diese Weise kann man beliebig viel Tangenten ziehen, und durch alle die Ellipse von selbst entstehen lassen. Soll mit Hilfe dieser Methode genau eine Ellipse auf dem Papiere construirt werden, so ist nicht nur erforderlich, daß die beiden Schenkel des Lineals des Zeichners genau einen rechten Winkel bilden, sondern daß auch die Spitze **S** sehr scharf seyn muß, um sie genau in die Peripherie des Kreises stellen zu können; das Letztere ist bei hölzernen Linealen in der Regel nicht der Fall, da deren Spitze bei **S** durch den Gebrauch sehr bald stumpf geworden ist. Besitzt daher der Zeichner kein Lineal von Metall und will er dennoch eine Ellipse durch Tangenten genau construiren, so muß er Aufl. 7. der vorigen Aufgabe anwenden, die zwar etwas mühsamer ist, allein an Genauigkeit auch nichts zu wünschen übrig läßt.

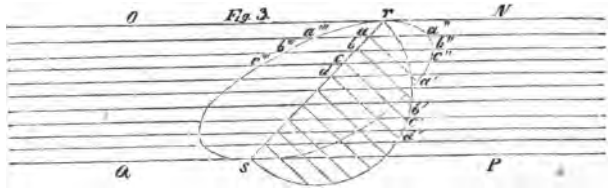
Aufgabe 70.

Eine Ellipse zu construiren, welche zwei gegebene parallele Linien **NO, PQ** berührt.

Aufl. 1. Man ziehe zwiſchen beiden Parallelen NO, PQ die Senkrechte NP und beſchreibe darüber einen Halbkreis, ziehe aus beliebigen Puncten b, d, f des Halbkreiſes Parallele mit NO, und beliebig rs oder r's' und mache a'b'=ab, c'd'=cd, e'f'=ef ꝛc., wodurch man Puncte zu verſchiedenen Ellipſen erhält.



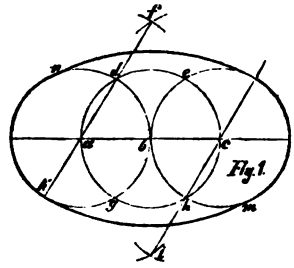
Aufl. 2. Man beſchreibe mit der Entfernung beider Parallelen NO, PQ als Durchmeſſer einen Kreis, ziehe durch denſelben beliebige Parallele mit NO und beliebig rs, mache dann ma'=ma, mb'=mb, nc'=nc, nd'=nd ꝛc., wodurch man beliebig viele Puncte zur verlangten Ellipſe erhält.



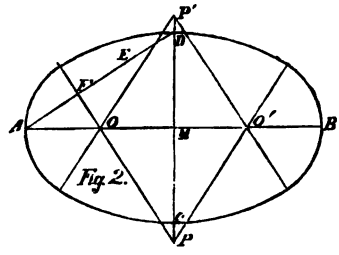
Aufl. 3. Man ziehe beliebig rs und beſchreibe darüber einen Halbkreis; durch beliebige Puncte a, b, c... in rs errichte man Senkrechte und ziehe Parallele mit NO, mache a'''a=aa''=aa', b'''b=bb''=bb' ꝛc., ſo findet man ſo viele Puncte zur Ellipſe, als man will.

Aufgabe 71.

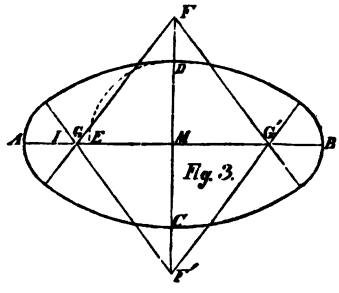
Durch Kreisbögen eine einer Ellipſe ähnlich ausſehenden Curve zu conſtruiren.



Aufl. 1. Man beſchreibe aus a, b, c drei gleiche beliebige Kreiſe, ſchneide mit derſelben Oeffnung des Zirkels aus d und e in f, und aus e in l, dann aus g und h in i und aus g in k; aus f mit fk den Bogen km, aus i mit il den Bogen ln.



Aufl. 2. Sind die beiden Axen AB, CD gegeben, ſo ziehe man AD, mache DE=MA—MD und ziehe durch die Mitte von AE durch F eine Senkrechte, die AM in O, CD in P ſchneidet, mache MO′=MO, MP′=MP, ſo ſind O, O′, P, P′ die Mittelpuncte zu den vier Kreisbögen.



Aufl. 3. Sind die beiden Axen AB, CD gegeben, so mache man ME=MD, halbire AE in I und mache MF=MF'=4AI, MG=MG'=3AI, so erhält man in F, F', G, G' die Mittelpuncte zu den 4 Kreisbögen.

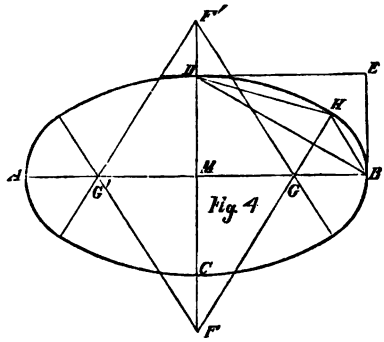


Fig. 4

Aufl. 4. Sind die beiden Axen AB, CD gegeben, so construire man das Rechteck MDEB, ziehe die Diagonale DB und halbire die Winkel BDE und DBE; wo sich die Halbirungslinien in H schneiden ziehe man durch H eine Senkrechte auf DB; diese schneidet MB in G, MC in F, mache dann MG'=MG, MF'=MF, so hat man in F, G, F', G' die Mittelpuncte zu den 4 Kreisbögen.

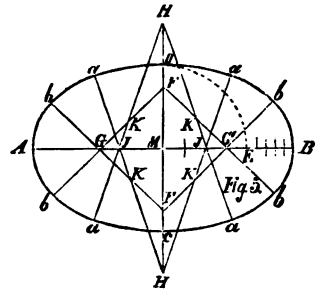
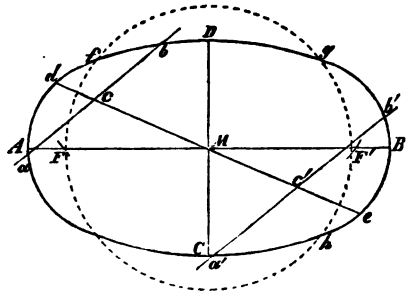


Fig. 5.

Aufl. 5. Sind die beiden Axen AB, CD gegeben, so mache man ME=MD, theile EB in 5 gleiche Theile, mache MG=MF =FH=$\frac{1}{5}$EB, MI=$\frac{3}{5}$MG und ziehe FG und HI, die sich in K schneiden, so ist H der Mittelpunct für den Bogen aa, K der Mittelpunct für den Bogen ab und G der Mittelpunct für den Bogen bb.

Aufgabe 72.

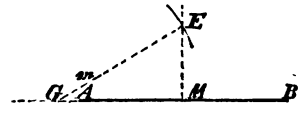
Der Umfang einer Ellipſe iſt gegeben, man ſoll den Mittelpunct, die beiden Axen und die Brennpuncte conſtruiren.



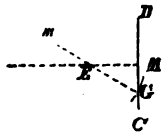
Aufl. Man ziehe zwei parallele Sehnen ab, a'b', halbire ſie in c und c'. und ziehe cc' bis d und e, halbire dc in M, ſo iſt M der Mittelpunct der Ellipſe. Aus M beſchreibe einen Kreis, der den Umfang der Ellipſe in f, g und h ſchneidet, und ziehe durch M AB parallel fg, CD parallel gh, ſo ſind AB, CD die beiden Axen. Aus C oder D ſchneide mit AM in F und F', ſo hat man dadurch die Brennpuncte gefunden.

Aufgabe 73.

Es iſt eine Axe und ein Punct m in dem Umfange einer Ellipſe gegeben, man ſoll die zweite Axe conſtruiren.



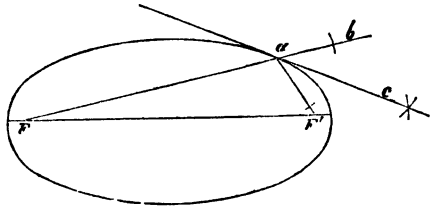
Aufl. 1. Fall. Es ſei die große Axe AB und der Punct m gegeben. Man halbire AB in M, errichte eine Senkrechte ME, und ſchneide aus m mit AM in E, ziehe mE, bis ſie die Verlängerung von AB in G ſchneidet, ſo iſt Gm die halbe kleine Axe.



2. Fall. Es ſei die kleine Axe CD und der Punct m gegeben. Man halbire CD in M, ziehe das Perpendikel ME und ſchneide aus m mit MD in E und verlängere mE bis G, ſo iſt mG die halbe große Axe.

Aufgabe 74.

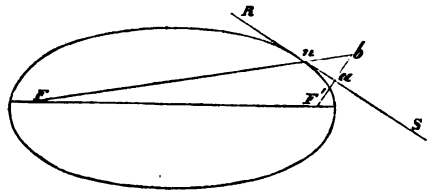
An einem gegebenen Puncte a in der Ellipſe eine Tangente zu ziehen.



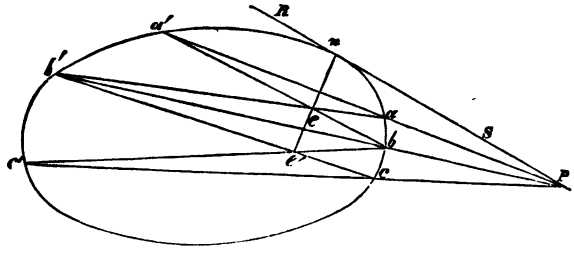
Aufl. Man ziehe von a zwei Linien nach den beiden Brennpuncten F und F', verlängere die eine über a nach b hinaus, und halbire den Winkel F'ab, ſo iſt die Halbirungslinie ac Tangente an a.

Aufgabe 75.

Eine Ellipſe und an ihr eine Tangente ſind gegeben, man ſoll den Berührungspunct conſtruiren.



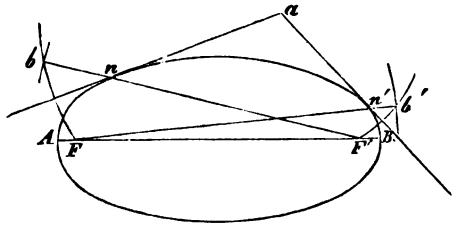
Aufl. 1. Man fälle von dem einen der beiden Brennpuncte, etwa F', eine Senkrechte auf die Tangente RS, mache ab=aF' und ziehe von b nach dem andern Brennpuncte eine Gerade, so geht diese durch den Berührungspunct n.



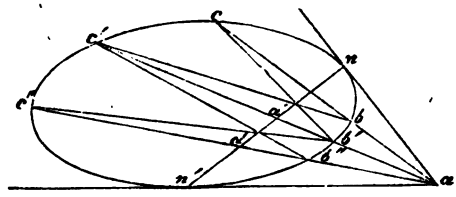
Aufl. 2. Man nehme in der Tangente RS einen beliebigen Punct P an, ziehe aus P drei Secanten und verbinde die Schnittpuncte je zwei derselben kreuzweise, wodurch man die Puncte e und e' erhält; diese mit einander verbunden geben dann den Berührungspunct n.

Aufgabe 76.

Durch einen gegebenen Punct a außerhalb einer Ellipse eine Tangente zu construiren.



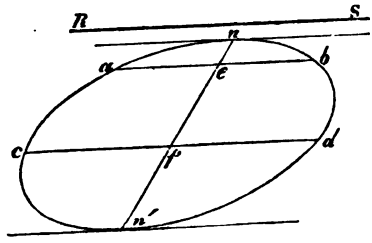
Aufl. 1. Aus a beſchreibe man mit aF und aF′ zwei Bogen, ſchneide dieſelben mit AB aus F in b′, aus F′ in b und ziehe F′b und Fb′, ſo erhält man durch die Schnittpuncte n und n′ die Berührungspuncte der Tangenten aus a.



Aufl. 2. Man ziehe aus a drei beliebige Secanten, verbinde die Schnittpuncte kreuzweiſe, ſo erhält man die Puncte dd′; dieſe mit einander verbunden geben die Berührungspuncte n, n′.

Aufgabe 77.

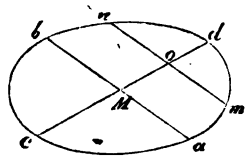
An einer Ellipſe eine Tangente zu ziehen, die mit einer gegebenen Linie RS parallel iſt.



Aufl. Man ziehe mit RS zwei parallele Sehnen ab, cd, und halbire dieſelben in e und f, ziehe durch ef die Gerade bis n und n′, ſo ſind dieſes die Berührungspuncte.

Aufgabe 78.

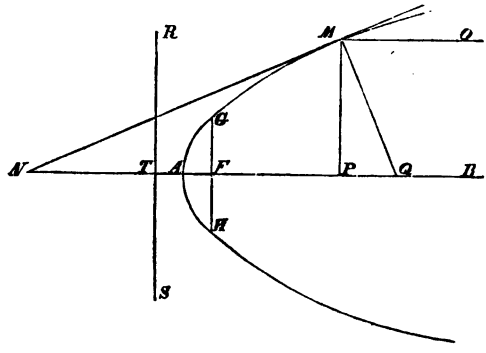
Zu einem gegebenen Durchmeſſer ab der Ellipſe den zugehörigen conjugirten zu conſtruiren.



Aufl. Man ziehe mti ab eine parallele Sehne mn, halbire ſie in o und Mo bis c und d, ſo iſt cd der conjugirte Durchmeſſer zu ab.

Von der Parabel.

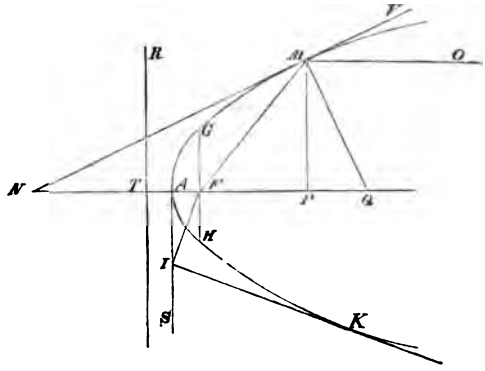
Bezeichnungen.



Man nennt **AB** die Axe der Parabel
A den Scheitelpunct
F den Brennpunct
GH den Parameter, und bezeichnet ihn durch **p**
RS die Leitlinie (Directrix)
MO einen Durchmeſſer
MN eine Tangente

Man nennt **NP** eine Subtangente
MQ eine Normale
PQ eine Subnormale
MP eine Ordinate
AP eine Abſciſſe.

Einige der wichtigſten Eigenſchaften der Parabel.



I. Der Scheitelpunct **A** liegt in der Mitte zwiſchen dem Brennpuncte **F** und der Directrix **RS**, ſeine Entfernung von beiden iſt der vierte Theil des Parameters **GH**.

II. Die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich, wie die ihnen zugehörigen Abſciſſen, d. h. es gilt ſtets die Proportion

$$PM^2 : FG^2 = AP : AF.$$

III. Der Parameter iſt die vierte Proportionallinie zu einer Abſciſſe und der ihr zugehörigen Ordinate, d. h. es iſt

$$AP : PM = PM : GH.$$

IV. Die Subtangente **NP** iſt doppelt ſo groß als die Abſciſſe **AP**.

V. Die Subnormale **PQ** iſt dem halben Parameter **GH** gleich.

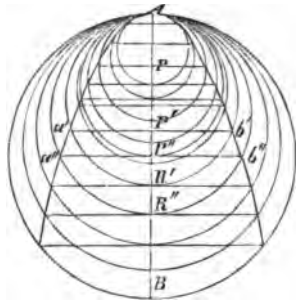
VI. Iſt **NV** eine Tangente der Parabel und zieht man von dem Berührungspuncte **M** eine Linie nach dem Brennpuncte **F** und **MO** parallel mit der Axe, ſo bilden dieſe beiden Linien gleiche Winkel mit der Tangente, d. h. es iſt

$$\angle NMF = \angle VMO.$$

VII. Schneidet eine Tangente **KI** die im Scheitelpuncte **A** errichtete Senkrechte in **I**, und zieht man von **I** nach dem Brennpuncte **F** die Gerade **IF**, ſo iſt immer **FIK** ein rechter Winkel.

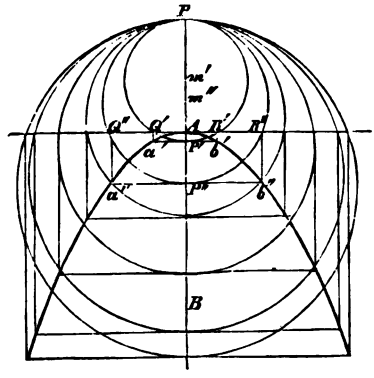
Aufgabe 79.

Eine Parabel zu construiren.



p

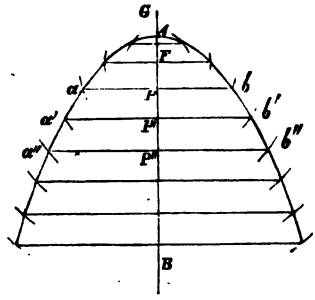
Aufl. 1. Ist der Scheitelpunct A und die Länge des Parameters AP=p gegeben, so nehme man in der Axe AB beliebige Puncte P′, P″... an, mache P′R′=P″R″=AP=p, beschreibe mit AR′, AR″ als Durchmesser Kreise und ziehe durch P′, P″ Senkrechte auf die Axe AB; wo diese die zugehörigen Kreise in a′, b′, a″, b″ schneiden hat man Puncte zur verlangten Parabel.



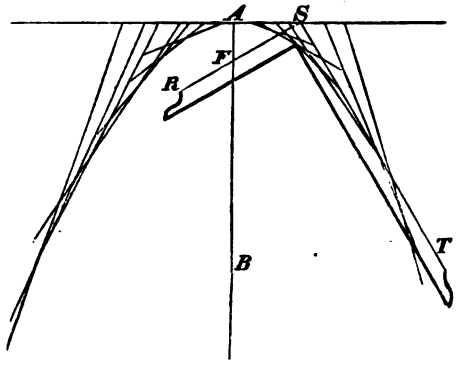
p

Aufl. 2. Ist der Scheitelpunct A und der Parameter p gegeben, so ziehe man durch A eine Senkrechte auf die Axe AB, mache oberhalb A AP=p und beschreibe aus einem beliebigen Puncte m′ mit m′P einen Kreis, der die Axe AB in P′, die Senkrechte durch A in Q′ und R′ schneidet, ziehe durch Q′, R′ Parallele mit AB und

durch P′ eine Parallele mit Q′R′, wo dieſe die vorigen Parallelen in a′, b′ ſchneidet, hat man zwei Puncte der Parabel. Eben ſo findet man die Puncte a″, b″.

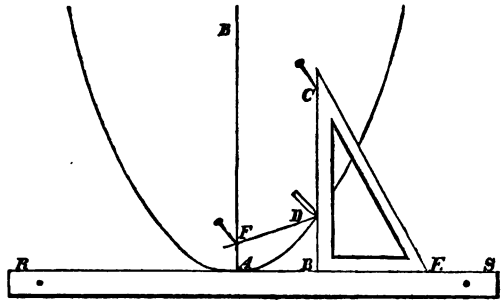


Aufl. 3. Iſt der Scheitelpunct A und der Brennpunct F gegeben, ſo mache man AG=AF, nehme in der Axe AB einen beliebigen Punct P an und ziehe durch denſelben eine Senkrechte, ſchneide dieſe aus F mit der Entfernung PG in a und b, ſo ſind dieſes Puncte der Parabel. Eben ſo findet man die Puncte a′, b′, a″, b″ ꝛc.



Aufl. 4. Conſtruction der Parabel durch Tangenten. Iſt der Scheitelpunct A und der Brennpunct F gegeben, ſo ziehe man durch A eine Senkrechte auf die Axe, und bewege ein rechtwinkliges Lineal ſo, daß der eine Schenkel RS ſtets durch den Brennpunct F geht, die Spitze des Lineals S aber ſtets in der Senkrechten durch A bleibt, und ziehe am andern Schenkel die Linie ST, ſo iſt dieſes eine Tan-

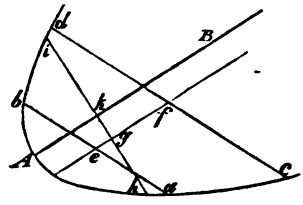
gente der Parabel. Auf dieſe Weiſe ziehe man ſo viele nahe an einander liegende Tangenten, daß die Parabel dadurch von ſelbſt entſteht.



Aufl. 5. Iſt der Scheitelpunct **A** und der Brennpunct **F** gegeben, ſo ziehe man durch **A** eine Senkrechte auf die Axe, lege ein Lineal **RS** an dieſelbe und befeſtige es, alsdann lege man ein rechtwinkliges Dreieck mit der einen Cathete an **RS** an und befeſtige das Ende eines Fadens von der Länge **CB+AF** in **C**, das andere Ende im Brennpuncte **F** und ſchiebe nun das dreieckige Lineal von **A** nach **S** fort, ſpanne mit einem Stifte den Faden ſtramm an, ſo daß das Stück **CD** deſſelben dicht an der Seite **BC** des Lineals anliegt, ſo iſt **D** alsdann ein Punct der verlangten Parabel.

Aufgabe 80.

Die Axe einer Parabel zu finden.



Aufl. Man ziehe zwei beliebige parallele Sehnen **ab**, **cd**, halbire dieſelben in **e** und **f**, ziehe **ef** und durch einen beliebigen Punct **g** eine Sehne **ih** ſenkrecht auf **ef**, halbire **ih** in **k**, und ziehe durch **k** parallel **ef** die Axe **AB**.

Aufgabe 81.

Den Parameter einer Parabel zu finden.

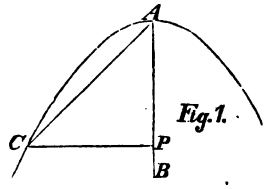


Fig. 1.

Aufl. 1. Man ziehe aus dem Scheitelpuncte A eine Sehne AC, die mit der Axe AB einen halben rechten Winkel bildet; aus dem Schnittpuncte C dieſer Sehne mit der Parabel ziehe man eine Senkrechte CP auf die Axe AB, ſo iſt CP=AP der Parameter.

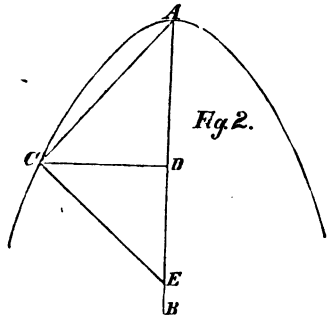
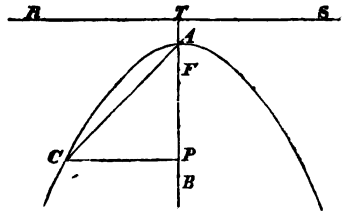


Fig. 2.

Aufl. 2. Man ziehe aus dem Scheitelpunct A eine beliebige Sehne AC, fälle aus C ein Perpendikel CD auf die Axe AB und ein Perpendikel CE auf AC ſelbſt, ſo iſt DE der Parameter.

Aufgabe 82.

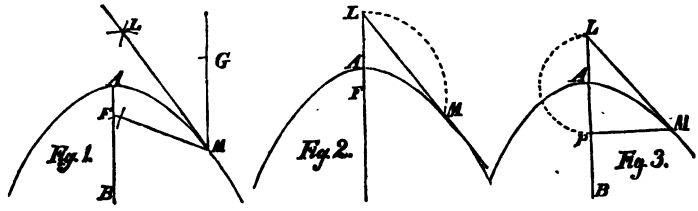
Den Brennpunct und die Directrix einer Parabel zu conſtruiren.



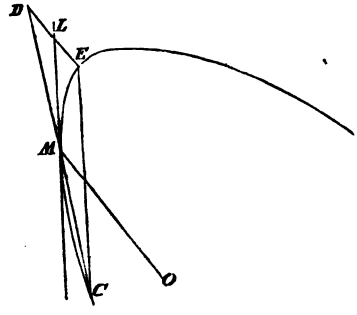
Aufl. Man ziehe vom Scheitelpuncte A aus eine Sehne AC unter einem halben rechten Winkel, fälle die Senkrechte CP auf die Axe AB und mache AF=AT=¼AP und ziehe durch T die Senkrechte RS auf die Axe, so ist F der Brennpunct, RS die Directrix.

Aufgabe 83.

Durch einen gegebenen Punct M in der Parabel eine Tangente zu ziehen.



Aufl. 1. Man verbinde (Fig. 1.) den gegebenen Punct M mit dem Brennpuncte F, ziehe MG parallel der Axe AB und halbire den Winkel FMG durch ML, so ist ML die Tangente. Oder: man mache (Fig. 2.) FL=FM und ziehe LM. Oder: man ziehe (Fig. 3.) durch M eine Senkrechte MP auf die Axe AB, mache AL=AP und ziehe ML.



Aufl. 2. Man ziehe durch den gegebenen Punct M einen Durchmesser MO und eine Sehne MC, verlängere MC und mache MD=MC, ziehe durch D eine Parallele DE mit MO, und ziehe durch M mit CE eine Parallele ML, so ist diese Tangente an M.

Aufgabe 84.

Durch einen gegebenen Punct M außerhalb einer Parabel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

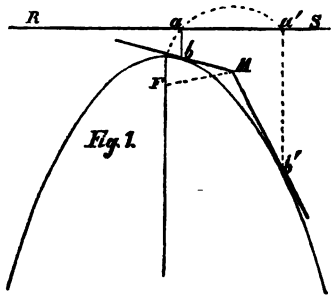


Fig. 1.

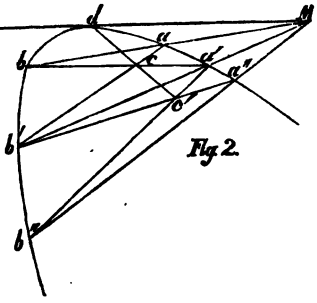


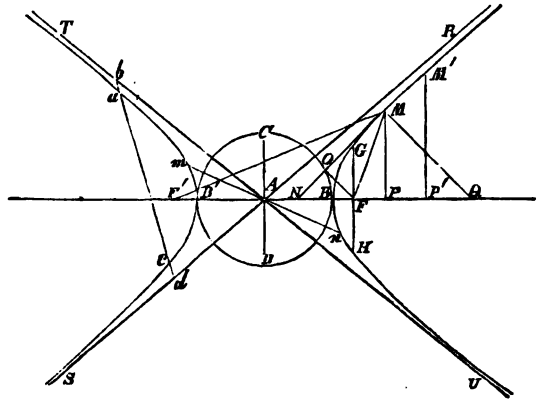
Fig. 2.

Aufl. 1. Ist der Brennpunct F und die Directrix RS gegeben, so schneide man (Fig. 1.) aus M mit MF die Directrix in a und a', ziehe durch a und a' die Senkrechten ab, a'b'; wo diese die Parabel in b und b' schneiden, sind die Berührungspuncte, und ziehe dann Mb, Mb'.

Aufl. 2. Aus dem gegebenen Puncte M ziehe man (Fig. 2.) drei Secanten, verbinde die Durchschnittspuncte kreuzweise, so hat man dadurch die Puncte c und c'; verbindet man nun diese, so erhält man den Berührungspunct d.

Von der Hyperbel.

Bezeichnungen.



Man nennt **A** den Mittelpunct der Hyperbel
B und **B'** die Scheitelpuncte
F und **F'** die Brennpuncte
BB' die Hauptaxe, die erste Axe
CD die imaginäre Axe, die zweite Axe, wenn
BC = BD = AF ist.
mn einen Durchmesser
GH den Parameter, und bezeichnet ihn durch **p**
RS, TU Asymptoten
MN eine Tangente
NP eine Subtangente
MQ eine Normale
PQ eine Subnormale
MP eine Ordinate
AP eine Abscisse

Man nennt den Winkel RAU=TAS den Asymptotenwinkel
die Hyperbel gleichseitig, wenn beide Axen BB′ und
CD einander gleich sind
FM, F′M Radii vectores, Leitstrahlen,

Einige der wichtigsten Eigenschaften der Hyperbel.

I.

Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Producte der Entfernungen der Fußpuncte der Abscissen von den beiden Scheitelpuncten der Hyperbel, d. h. es ist

$$PM^2 : P'M^2 = BP.B'P : BP'.B'P'.$$

II.

Zieht man durch zwei beliebige Puncte a und c in der Hyperbel die Gerade ac, bis sie beide Asymptoten schneidet, so ist immer ab=cd.

III.

Die Radii vectores FM, F′M machen mit der Tangente MN gleiche Winkel, d. h. es ist

$$\angle FMN = F'MN.$$

IV.

Der Parameter GH ist die vierte Proportionallinie zur ersten Axe BB′ und zweiten CD, d. h. es ist

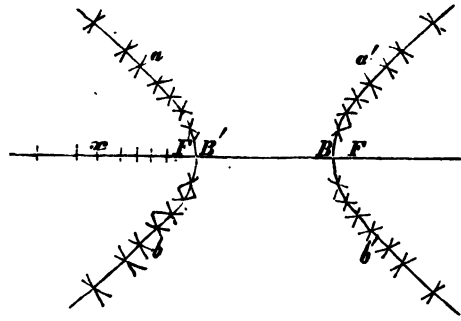
$$B'B : CD = CD : GH.$$

V.

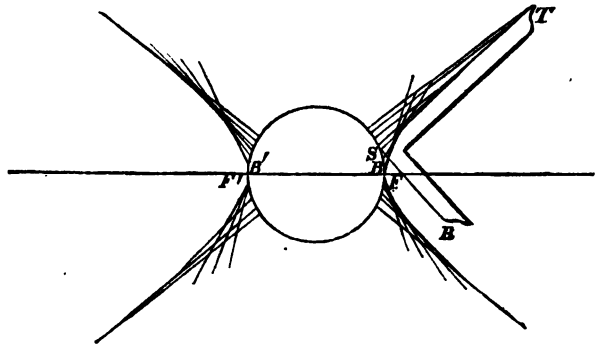
Zieht man durch einen Brennpunct F eine Senkrechte FO auf eine Tangente MN, so liegt der Durchschnittspunct O in der Peripherie des über der ersten Axe BB′ beschriebenen Kreises.

Aufgabe 85.

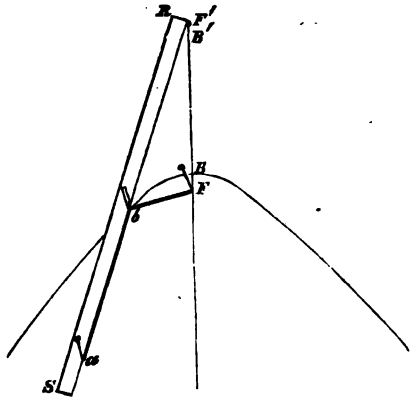
Eine Hyperbel zu construiren.



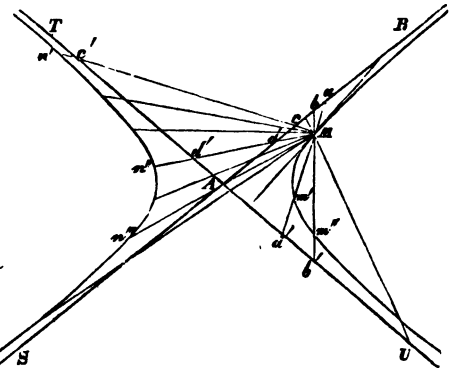
Aufl. 1. Sind die Hauptaxe BB′ und die beiden Brennpuncte F, F′ gegeben, so nehme man auf BB′ über F′ hinaus einen beliebigen Punct x an, schneide mit Bx aus F in a und b, aus F′ in a′ und b′ die Bogen, die man mit B′x aus F′ bei a und b′, aus F bei a′ und b′ gemacht hat, so erhält man zwei Puncte für jeden Zweig der Hyperbel.



Aufl. 2. Construction der Hyperbel durch Tangenten. Sind die Hauptaxe BB′ und die beiden Brennpuncte F und F′ gegeben, so beschreibe man über der Hauptaxe BB′ einen Kreis, bewege ein rechtwinkliges Lineal RST so, daß der eine Schenkel RS stets durch den Brennpunct F geht, die Spitze des Lineals S stets in der Peripherie des Kreises bleibt, und ziehe am andern Schenkel die Linie ST, so ist diese Tangente der Hyperbel. Auf dieselbe Weise erhält man den zweiten Zweig der Hyperbel



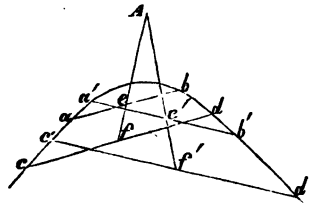
Aufl. 3. Sind die Hauptaxe B'B und die beiden Brennpuncte F, F' gegeben, so befestige man ein Lineal RS, daß es um den Punct F' gedreht werden kann; in einem beliebigen Puncte a der Kante des Lineals befestige man das eine Ende eines Fadens von der Länge F'a—BB', das andere Ende in dem Brennpuncte F, bewege nun das Lineal um F' und ziehe den Faden straff an, so daß das Ende ab des Fadens genau an der Kante des Lineals anliegt, so ist b ein Punct der gesuchten Hyperbel.



Aufl. 4. Sind die beiden Asymptoten RS, TU und ein Punct M in der Hyperbel gegeben, so ziehe man durch M beliebige Linien aa', bb', cc', dd', welche beide Asymptoten schneiden und mache aM=a'm', bM=b'm'', cM=c'n', dM=d'n'' ꝛc., so sind m', m''... Puncte für den einen Zweig, n', n''... für den andern Zweig der Hyperbel.

Aufgabe 86.

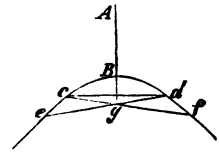
Den Mittelpunct einer gegebenen Hyperbel zu conſtruiren.



Aufl. Man ziehe zwei parallele Sehnen ab, cd und verbinde ihre Mittelpuncte e, f, ziehe zwei andere parallele Sehnen a'b', c'd', und verbinde gleichfalls ihre Mittelpuncte e', f'; wo ſich dann dieſe Verbindungslinien in A ſchneiden, iſt der Mittelpunct der Hyperbel.

Aufgabe 87.

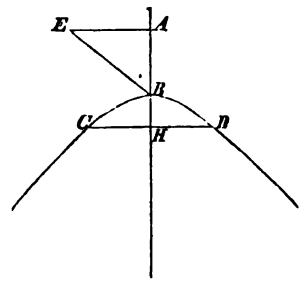
Die Hauptaxe einer Hyperbel zu conſtruiren.



Aufl. Aus dem Mittelpuncte A ſchneide man mit einem beliebigen Radius die Hyperbel in c und d, halbire den Bogen cd in B und ziehe AB; oder man ziehe die Sehne cd und aus A eine Senkrechte AB auf dieſelbe; oder man ſchneide nochmals in e und f, ziehe de und cf und verbinde den Schnittpunct g mit A, ſo iſt AB die halbe Hauptaxe.

Aufgabe 88.

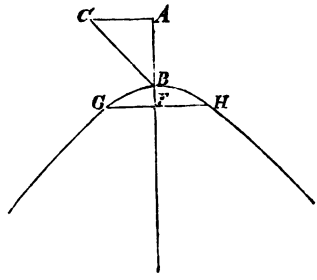
Die zweite oder imaginäre Axe einer Hyperbel zu conſtruiren.



Aufl. Man ziehe im Mittelpuncte A der Hyperbel eine Senkrechte AE auf die Hauptaxe AB, mache AE=AB und trage von A, BE nach H, ziehe durch H die Senkrechte CD, ſo iſt dieſes die zweite Axe.

Aufgabe 89.

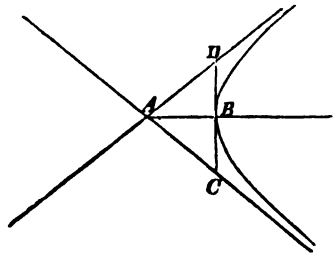
Die Brennpuncte und den Parameter einer Hyperbel zu conſtruiren.



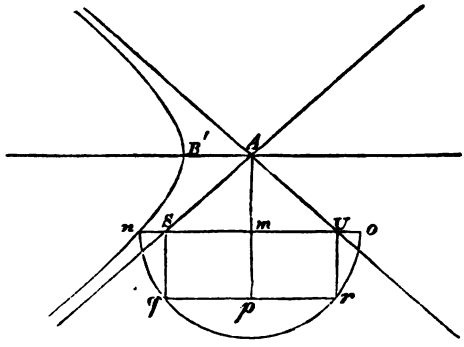
Aufl. Man ziehe im Mittelpuncte A der Hyperbel eine Senkrechte AC auf die Hauptaxe AB, mache AC gleich der halben zweiten Axe und trage von A, BC nach F, ſo iſt F der Brennpunct, und die Senkrechte durch F, GH der Parameter.

Aufgabe 90.

Die Aſymptoten einer Hyperbel zu conſtruiren.



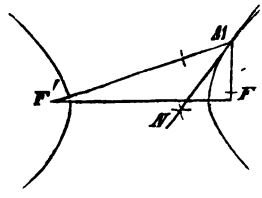
Aufl. 1. Man errichte im Scheitelpuncte B der Hyperbel eine Senkrechte CD auf der Hauptaxe AB mache BC=BD gleich der halben zweiten Axe und ziehe AC, AD.



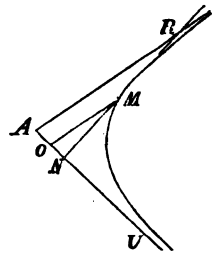
Aufl. 2. Man errichte im Mittelpuncte A der Hyperbel eine Senkrechte Ap auf der Hauptaxe AB', durch einen beliebigen Punct m in derselben ziehe man eine Parallele mit AB' und mache mo=mn, errichte über no einen Halbkreis und mache mp=AB', ziehe durch p eine Parallele qr mit no, und durch q und r die Parallelen qS, rU mit Ap, so sind AS, AU die Asymptoten der Hyperbel.

Aufgabe 91.

An einem gegebenen Puncte M in der Hyperbel eine Tangente zu construiren.



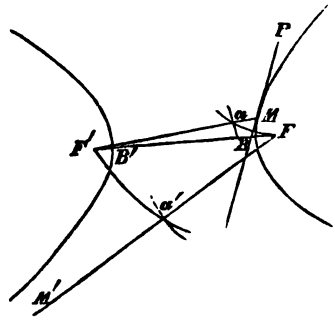
Aufl. 1. Sind die beiden Brennpuncte F und F′ gegeben, ſo ziehe man die beiden radii vectores FM, F′M und halbire den Winkel FMF′ durch MN.



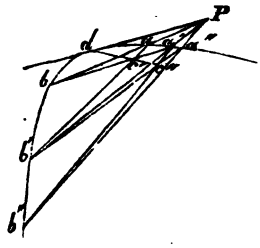
Aufl. 2. Sind die beiden Aſymptoten gegeben, ſo ziehe man durch M eine Parallele MO mit AR, bis ſie die andere Aſymptote AU in O ſchneidet, mache ON=AO und ziehe MN.

Aufgabe 92.

Durch einen gegebenen Punct P außerhalb einer Hyperbel eine Tangente zu conſtruiren.



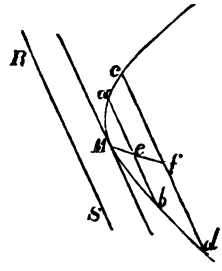
Aufl. 1. Man beſchreibe aus P mit PF, PF′ zwei Bogen Fa und F′a′, ſchneide dieſe aus dem andern Brennpuncte mit der Hauptaxe BB′ als Radius in a und a′, und ziehe F′a bis M, Fa′ bis M′, ſo ſind M und M′ die Berührungspuncte.



Aufl. 2. Man ziehe aus dem gegebenen Puncte P drei Secanten und verbinde die Durchschnittspuncte kreuzweise, so erhält man dadurch die Puncte c' und c''; verbindet man diese, so erhält man dadurch den Berührungspunct d.

Aufgabe 93.

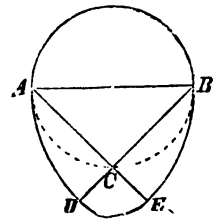
An einer Hyperbel eine Tangente zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden RS parallel ist.



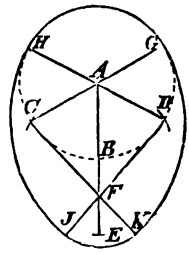
Aufl. Man ziehe zwei beliebige mit RS parallele Sehnen ab, cd, verbinde deren Mittelpuncte e und f; wo diese Verbindungslinie die Hyperbel in M schneidet, ist der Berührungspunct.

Aufgabe 94.

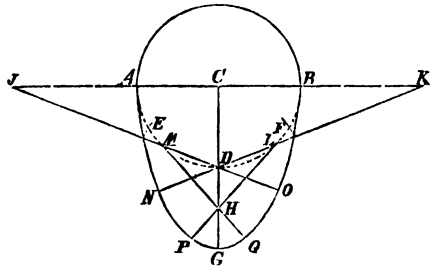
Ein Oval oder eine Eilinie zu construiren.



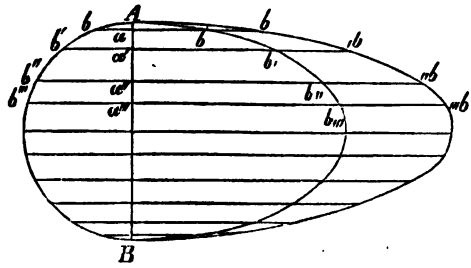
Aufl. 1. Man beſchreibe über einer Linie AB einen Kreis, mache AC=BC, aus A mit AB den Bogen BE, aus B den Bogen AD und aus C den Bogen DE.



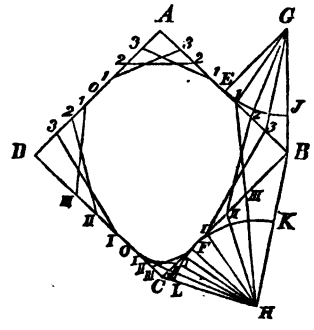
Aufl. 2. Man beſchreibe aus A mit AB einen Kreis, ſchneide aus B mit demſelben Radius in C, D und E, halbire BE in F und ziehe CG, DH, CK, DI; aus D mit DH den Bogen HI, aus C den Bogen GH und aus F den Bogen IK.



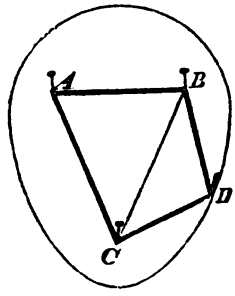
Aufl. 3. Man beſchreibe aus C einen Kreis und ſchneide aus D mit demſelben Radius in E, F und G, halbire DG in H und mache AI=BK=3DH, ziehe durch D, KN, IO; durch H, FP, EQ, und mache aus K und I die Bogen AN, BO, aus L und M die Bogen NP, OQ und aus H den Bogen PQ.



Aufl. 4. Man beſchreibe über AB einen Halbkreis, ziehe beliebige Senkrechte auf AB und mache $a'b_{,}=2a'b'$; $a''b_{,,}=2a''b''$; $a'''b_{,,,}=2a'''b'''$ ꝛc. Oder $a',b=3a'b'$; $a'',,b=3a''b''$; $a''',,,b=3a'''b'''$ ꝛc.



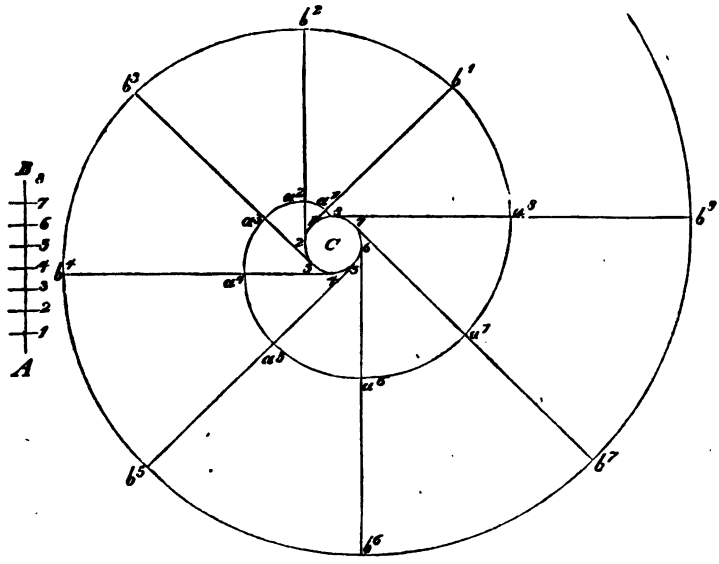
Aufl. 5. Conſtruction durch Tangenten. Man conſtruire das Quadrat ABCD, halbire AB in E und nehme auf BC den Punct F beliebig an, doch ſo, daß CF kleiner als die Hälfte von BC, mache die Perpendikel in E und F =AE und beſchreibe aus G und H die Bogen EI, FK, FL, theile jeden in beliebig viel gleiche Theile und ziehe durch die Theilpuncte und G und H Linien, bis ſie die Seiten des Quadrates in den Puncten 1, 2, 3 und I, II, III ſchneiden, trage die Theilpuncte der Reihe nach von E nach A und dann von A nach D; eben ſo die Theilpuncte auf CB der Reihe nach von C nach D und verbinde die Puncte, wie die Figur zeigt, ſo entſteht durch die Tangenten in dem Quadrate die Eilinie.



Aufl. 6. Man befeſtige in den drei Endpuncten eines gleichſchenkligen Dreiecks ABC Stifte, lege um dieſelben eine Schnur und ſpanne mit einem Zeichenſtift dieſelbe ſtraff an, ſo erhält man durch Fortbewegung dieſes Stiftes die verlangte Eilinie.

Aufgabe 95.

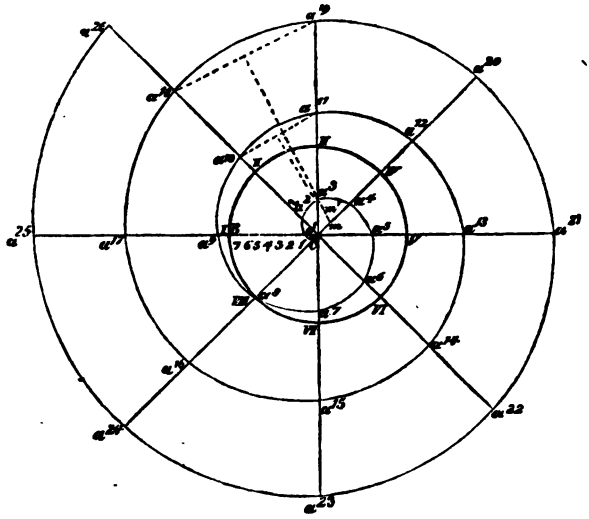
Die Evolvente oder Abwickelungslinie eines Kreiſes zu conſtruiren.



Aufl. Man conſtruire eine Linie AB gleich der Peripherie des gegebenen Kreiſes, theile dieſe und die Peripherie in beliebig viel gleiche Theile, z. B. hier in 8, ziehe an jedem Theilpuncte des Kreiſes eine Tangente, und mache die erſte Tangente $a'1 = A1$, $a^2 2 = A2$, $a^3 3 = A3$ ꝛc., ſo wird die letzte Tangente $a^8 8 = AB$ gleich dem Umfange des Kreiſes werden. Setzt man von hier die Evolvente weiter fort, ſo erhält man die Puncte b leicht, wenn man jedesmal ab=AB macht, wodurch dann die Kreisevolvente die Form einer Spirallinie annimmt. Hat man den Kreis in eine ſo große Anzahl gleicher Theile getheilt, daß der Unterſchied zwiſchen der Länge eines Bogens und ſeiner Sehne beim Zeichnen nicht mehr in Betracht kommt, ſo kann man die Kreisevolvente ſelbſt ohne großen Fehler durch Kreisbögen conſtruiren, deren Mittelpuncte ſich auf den Tangenten befinden, welche man durch die Puncte 1, 2, 3... gezogen hat. Man beſchreibe dann aus dem Puncte 1 mit 1.8 den Bogen $8a'$, aus 2 mit $2a'$ den Bogen $a'a^2$, aus 3 mit $3a^2$ den Bogen a^2a^3 ꝛc.

Aufgabe 96.

Eine archimediſche Spirallinie zu conſtruiren.

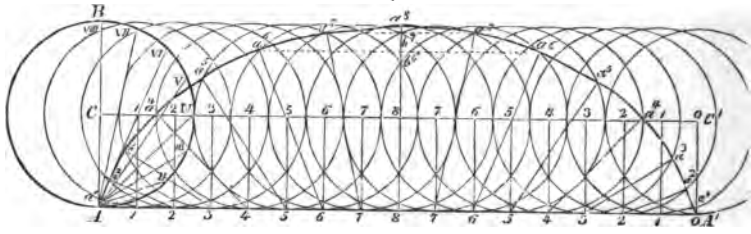


Aufl. Man theile einen Kreis in beliebig viel, hier z. B. in 8 gleiche Theile, und ziehe durch die Theilpuncte I, II, III ꝛc. die verlängerten Radien CI, CII, CIII..., theile einen Radius CB in eben ſo viele gleiche Theile, und trage von C aus auf den erſten Radius CI einen, auf den zweiten Radius CII zwei, auf CIII drei ſolcher Theile des Radius auf, und ſo erhält man die Puncte a', a^2, a^3 ꝛc., die dann, durch eine Curve verbunden, die archimediſche Spirale geben. Iſt man bis zum Puncte a^8, der in der Peripherie des Kreiſes in VIII liegen wird, gekommen, und will man die Spirale weiter fortſetzen, ſo darf man nur den Radius CB von a^1 nach a^9, von a^2 nach a^{10}, von a^3 nach a^{11} abſetzen. Will man die Spirale näherungsweiſe durch Kreisbögen conſtruiren, ſo ziehe man zwiſchen zwei auf einander folgenden Puncten z. B. a^{10}, a^{11}, oder a^{18}, a^{19} die in den Radien CII, CIII liegen, die Mittellinie, bis ſie den nächſtfolgenden Radius CIV in m, m' ſchneidet, und nehme m als Mittelpunct für den Bogen a^{10}, a^{11}, m' als Mittelpunct für den Bogen a^{18}, a^{19} an.

Aufgabe 97.

Eine Cycloide oder Radlinie zu construiren.

Fig. 1.

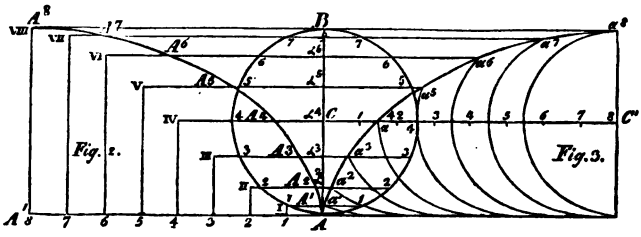


Aufl. 1. Man beschreibe mit dem Radius CA einen Kreis, ziehe den Durchmesser AB und auf diesen CC′, AA′ senkrecht, mache CC′=AA′ gleich dem Umfange des Kreises, und theile diesen in doppelt so viel gleiche Theile als den Halbkreis AB — hier in der Figur z. B. ist CC′ in 16, der Halbkreis AB in 8 gleiche Theile getheilt worden — beschreibe aus den Theilpuncten 1, 2, 3... in CC′ mit dem Radius CA Kreise, die durch die entsprechenden Theilpuncte 1, 2, 3... in AA′ gehen werden, schneide alsdann mit AI aus 1 in AA′ den Kreis aus 1 in a^1, mit AII aus 2 in AA′ den Kreis aus 2 in a^2, mit AIII aus 3 in AA′ den Kreis aus 3 in a^3 ꝛc., so erhält man in A, a^1, a^2, a^3... Puncte zur verlangten Cycloide. Man sieht, daß die Cycloide durch die Linie $8a^8$ in zwei congruente Theile getheilt wird, und daß man daher die eine Hälfte leicht durch die andere finden kann, z. B. wenn man durch die Puncte a^7, a^6 Parallele mit CC′ zieht und $a^7b^7=b^7a^7$, $a^6b^6=b^6a^6$ macht. Man nennt hier die Linie AA′ die Basis der Cycloide, die Senkrechte $8a^8$ im Mittelpuncte der Basis die Axe und den Kreis mit dem Radius CA den Erzeugungskreis, den Punct A den Erzeugungspunct.

Einige Eigenschaften dieser Linie sind:

1) die Länge der Cycloide ist dem 8fachen Radius des Erzeugungskreises gleich;
2) der Inhalt der Cycloide ist 3mal so gröss, als der erzeugende Kreis;
3) die Evolvente der Cycloide ist wieder dieselbe Cycloide;
4) ein Körper, der sich in einer Cycloide bewegt, kommt allemal

in gleicher Zeit zu dem tiefſten Punct dieſer krummen Linie, obgleich er von verſchiedenen Höhen herunterfällt, und dieſes verſteht man, wenn man ſagt, daß die Schwingungen eines Pendels in einer Cycloide iſochroniſch oder von gleicher Zeitdauer ſind.

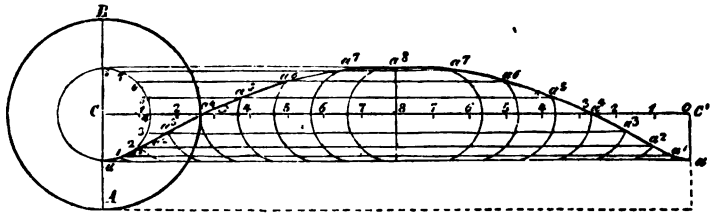


Aufl. 2. Man ziehe Fig. 2. im Erzeugungskreiſe den Durchmeſſer AB, AA′ ſenkrecht darauf und mache AA′ gleich dem halben Kreisumfange, theile dieſen in eben ſo viel gleiche Theile als den Halbkreis AB, ziehe durch die Theilpuncte in AA′ Senkrechte auf AA′ und eben ſo durch die Theilpuncte des Halbkreiſes Senkrechte auf AB, wodurch man die Puncte I, II, III ꝛc. und auf dem Durchmeſſer AB die Puncte α^1, α^2, α^3 ꝛc. erhält; mache alsdann $IA' = 1\alpha'$; $IIA^2 = 2\alpha^2$; $IIIA^3 = 3\alpha^3$ ꝛc., ſo erhält man in den Puncten A, A^1, A^2, A^3... bis A^8 Puncte zu den halben Cycloiden.

Aufl. 3. Man ziehe Fig. 3. den Durchmeſſer AB, durch den Mittelpunct C eine Senkrechte darauf und mache CC′ gleich dem halben Kreisumfange, theile dieſen und den Halbkreis in eben ſo viele gleiche Theile und ziehe durch die Theilpuncte des Halbkreiſes Parallele mit CC′, aus 1 in CC′ ſchneide man mit dem Radius AC die Parallele durch 1 in a′, aus 2 in CC′ die Parallele durch 2 in a^2, aus 3 in CC′ die Parallele durch 3 in a^3, ſo geben die Puncte A, a^1, a^2, a^3...a^8 Puncte zu der geſuchten halben Cycloide.

Aufgabe 98.

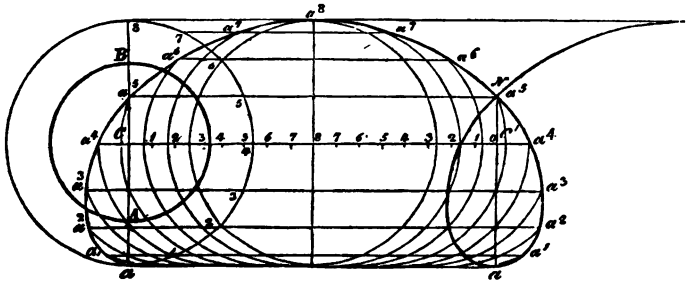
Eine verlängerte Cycloide zu construiren.



Aufl. Man ziehe durch den Punct a im Erzeugungskreise, der die verlängerte Cycloide beschreiben soll, einen Durchmesser AB und durch C eine Senkrechte CC′ gleich dem Umfange des Erzeugungskreises, beschreibe aus C mit Ca einen Kreis und theile diesen wie CC′ in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, ziehe durch die Theilpuncte im Kreise Parallele mit CC′ und schneide aus 1 in CC′ mit Ca die Parallele durch 1 in a′, aus 2 in CC′ die Parallele durch 2 in a^2, aus 3 in CC′ die Parallele durch 3 in a^3 ꝛc., so geben die Puncte a, a^1, a^2, a^3... verbunden die verlängerte Cycloide.

Aufgabe 99.

Eine verkürzte Cycloide zu construiren.



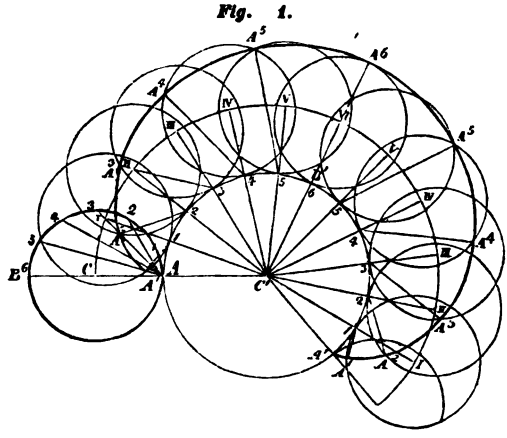
Aufl. Man ziehe durch den Punct a außerhalb des Erzeugungskreises, der die verkürzte Cycloide beschreiben soll, einen Durchmesser, und durch C senkrecht auf diesen CC′ gleich dem Umfange des Erzeugungskreises, beschreibe aus C mit Ca einen Kreis, und

theile dieſen wie CC′ in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, ziehe durch die Theilpuncte im Kreiſe Parallele mit CC′ und ſchneide aus 1 in CC′ mit Ca die Parallele durch 1 in a′, aus 2 in CC′ die Parallele durch 2 in a^2 ꝛc., ſo geben die Puncte a, a^1, a^2 ꝛc. verbunden die verkürzte Cycloide. Aus der Figur erſieht man, daß jeder neue Zweig der verkürzten Cycloide den vorigen in einem Puncte N durchſchneidet, was bei der gewöhnlichen und auch bei der verlängerten Cycloide nicht ſtatt findet.

Aufgabe 100.

Eine Epicycloide zu conſtruiren.

Fig. 1.



Aufl. 1. Man verbinde den Mittelpunct C des Erzeugungskreiſes mit dem Mittelpuncte C′ des als Baſis dienenden Kreiſes, ſo wird die Linie CC′ durch den Berührungspunct A beider gehen, und mache den Bogen AB′A′ gleich dem Umfange des Erzeugungskreiſes, was am leichteſten dadurch geſchieht, daß man den Centriwinkel AC′A′ nach der Proportion

$$2R\pi : 360 = 2r\pi : \angle AC'A'$$

ſucht, und hieraus

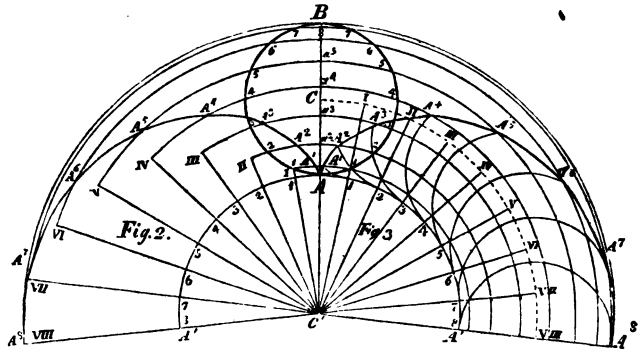
$$\angle AC'A' = \frac{r}{R} . 360$$

findet, worin r den Radius des Erzeugungskreiſes, R den Radius

des als Basis dienenden Kreises bedeutet. In der Figur z. B. sei AC=r=5; AC'=R=8 angenommen, so ergiebt sich daraus

$$\angle AC'A' = \tfrac{5}{8}.360 = 225°$$

diesen Winkel kann man nun entweder durch einen Transporteur abstecken, oder auch dadurch finden, daß man den Kreis aus C' von A aus in 8 gleiche Theile theilt und 5 solcher Theile davon nimmt. Man theile nun den Erzeugungskreis und den ihm an Länge gleichen Bogen AB'A' in dieselbe Anzahl gleicher Theile, beschreibe aus C' mit C'C einen Bogen, und ziehe die Radien C_1, C_2, C_3... bis sie den Bogen in den Puncten I, II, III... schneiden; aus diesen Puncten beschreibe man mit CA Kreise, und schneide aus 1 im Bogen AB'A' den Kreis aus I mit A1, im Erzeugungskreise in A' aus 2 im Bogen AB'A' den Kreis aus II mit A2 in A^2, aus 3 im Bogen AB'A' den Kreis aus III mit A3 in A^3 ꝛc., so erhält man in A^1, A^2, A^3 ꝛc. Puncte für die Epicycloide.



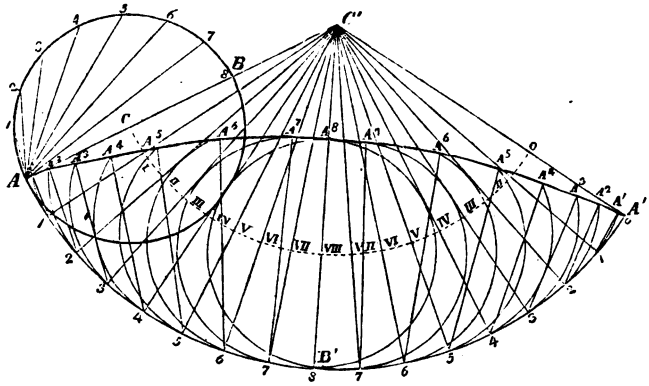
Aufl. 2. Man ziehe Fig. 2. CC' bis B, mache den Bogen AA' gleich der Länge des Halbkreises AB, theile beide in dieselbe Anzahl gleicher Theile, ziehe die Radien C'1, C'2, C'3 ꝛc. und beschreibe aus C' durch die Theilpuncte des Halbkreises concentrische Kreise, bis sie die gleichnamigen Radien in den Puncten I, II, III... und den Durchmesser AB in den Puncten a^1, a^2, a^3... schneiden, mache alsdann IA'=a'1, IIA²=a²2, IIIA³=a³3 ꝛc., so sind A', A^2, A^3 Puncte der Epicycloide.

Aufl. 3. Man ziehe Fig. 3. CC' bis B, mache den Bogen AA' gleich dem Halbkreise AB, theile beide in dieselbe Anzahl glei-

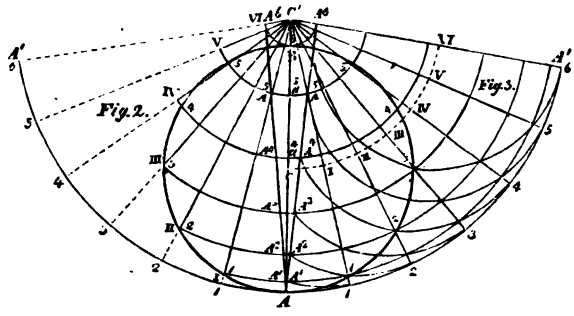
cher Theile, ziehe die Radien C′1, C′2, C′3... bis sie den Bogen aus C mit C′C in den Puncten I, II, III... schneiden, beschreibe aus C′ durch die Theilpuncte des Halbkreises concentrische Kreisbögen und schneide mit CA aus I den Bogen durch 1 in A′, aus II den Bogen durch 2 in A^2, aus III den Bogen durch 3 in A^3 ꝛc., so sind A^1, A^2, A^3... Puncte der Epicycloide.

Aufgabe 101.

Eine Hypocycloide oder innere Epicycloide zu construiren.



Aufl. 1. Die Construction ist ganz der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe analog; man mache den Bogen A8A′ dem Umfange des Erzeugungskreises gleich, theile beide in dieselbe Anzahl gleicher Theile, und ziehe die Radien C′1, C′2, C′3 ꝛc., beschreibe aus C′ mit C′C einen Bogen, und aus den Schnittpuncten I, II, III... dieses Bogens mit den Radien, Kreise mit dem Radius CA, schneide dann aus 1 in AB′ mit A1 den Kreis aus I in A′, aus 2 in AB′ mit A2 den Kreis aus II in A^2 ꝛc., so sind A^1, A^2, A^3... Puncte der Hypocycloide.



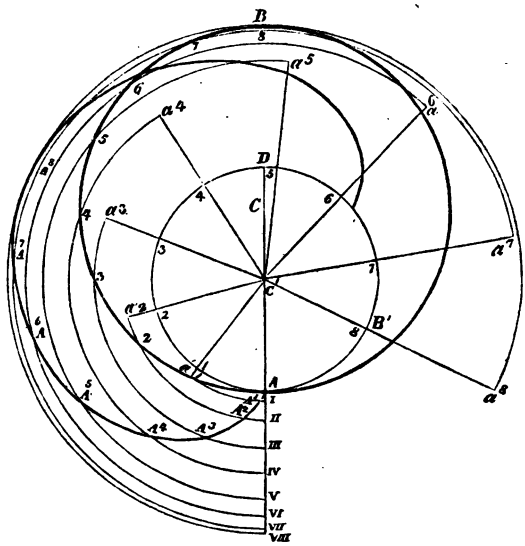
Aufl. 2. Man ziehe Fig. 2. C′C bis A, mache den Bogen AA′ gleich der Länge des Halbkreiſes AB, theile beide in dieſelbe Anzahl gleicher Theile und ziehe die Radien C′1, C′2, C′3..., beſchreibe aus C′ durch die Theilpuncte des Halbkreiſes Bogen, welche die gleichnamigen Radien in den Puncten I, II, III... und den Durchmeſſer AB in den Puncten a^1, a^2, a^3, a^4... ſchneiden; mache alsdann $a^1 1 = IA'$, $a^2.2 = IIA^2$, $a^3.3 = IIIA^3$, $a^4.4 = IVA^4$ ꝛc., ſo ſind A^1, A^2, A^3, A^4... Puncte der Hypocycloide.

Aufl. 3. Man mache den Bogen Fig. 3. AA′ gleich der Länge des Halbkreiſes AB, theile beide in gleichviel gleiche Theile, ziehe die Radien C′1, C′2, C′3... und ſchneide ſie aus C′ mit C′C in die Puncte I, II, III..., beſchreibe aus C′ durch die Theilpuncte des Halbkreiſes Bogen, und ſchneide den Bogen durch 1 mit CA aus I in A^1, den Bogen durch 2 aus II in A^2 ꝛc.

Bemerkung. Iſt der Radius CA des Erzeugungskreiſes die Hälfte des Radius C′A des als Baſis dienenden Kreiſes, ſo iſt die durch den Punct A erzeugte Hypocycloide eine gerade Linie, nämlich der Durchmeſſer AB.

Aufgabe 102.

Die Epicycloide für den Fall zu construiren, wenn der Erzeugungskreis größer als der als Basis dienende Kreis ist.



Aufl. Man suche auf dem als Basis dienenden Kreis einen Bogen A36B', welcher gleich der Länge des Halbkreises AB ist, und den man durch den erhabenen Centriwinkel AC'B' nach der Proportion

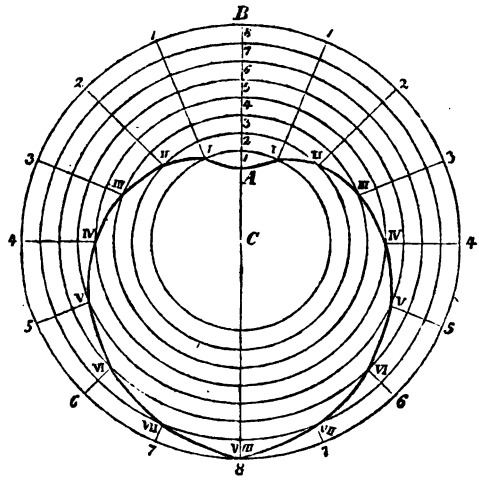
$$r\pi : 180 = R\pi : \angle AC'B'$$

findet, wodurch $\angle AC'B' = \frac{R}{r} . 180$ wird. Ist nun in unserer Figur z. B. R=11, r=7, so ist $\angle AC'B' = \frac{11}{7} . 180^\circ = 282^\circ 51' 13''$,

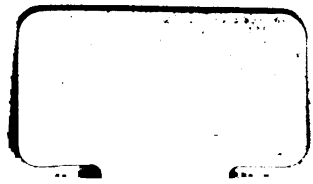
welchen Winkel man durch einen Transporteur oder auch dadurch finden kann, daß man den Halbkreis AD in 7 gleiche Theile theilt, und 11 solcher Theile für den Bogen A.3.6.B' nimmt. Theile dann den Halbkreis AB und den Bogen AB' in dieselbe Anzahl gleicher Theile, und beschreibe aus C' durch die Theilpuncte im Halbkreise Bogen, welche die gleichnamigen Radien in den Puncten $a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots$ und den verlängerten Radius C'A in den Puncten I, II, III... schneiden, mache alsdann $IA^1 = 1a^1$, $IIA^2 = 2a^2$, $IIIA^3 = 3a^3$ ꝛc. bis $VIIIA^8 = 8a^8$, so sind $A^1, A^2, A^3 \ldots A^8$ Puncte zu der Hälfte der gesuchten Epicycloide.

Aufgabe 103.

Eine Cordoide oder Herzcurve zu construiren.



Aufl. Man ziehe BC, nehme darin einen Punct A beliebig an und theile AB in beliebig viele gleiche Theile, beschreibe aus C durch die Theilpuncte auf AB concentrische Kreise, theile den Halbkreis durch B von B aus in eben so viel gleiche Theile und ziehe den Radius C1, bis er den Kreis durch 1 in I, den Radius C2, bis er den Kreis durch 2 in II ꝛc. schneidet, so geben die Puncte I, II, III ꝛc. die verlangte Cordoide.



Math 5708.46
Vorschule der Darstell
Cabot Science
3 2044 091